Diktat Kuliah (3 sks)

MQ 154: Program Linear

(Revisi Terakhir: Semester Genap 2020–2021)

Dosen:

Didit Budi Nugroho, D.Sc.

Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Matematika

Universitas Kristen Satya Wacana

2021

Kata Pengantar

Diktat ini merupakan naskah untuk mata kuliah MQ 154 Program Linear yang disusun khusus sebagai mata kuliah wajib bagi mahasiswa sarjana Program Studi Matematika di Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana. Kosyarat yang ditetapkan untuk mengambil mata kuliah tersebut yaitu mahasiswa harus sudah mengambil mata kuliah Aljabar Linear.

Materi dari diktat ini disajikan dalam lima bab dan menyesuaikan bobot 3 sks yang terdiri dari 3 sks tatap muka (2x50 menit) dan 1 sks praktikum (2x50 menit). Dari perspektif mahasiswa, diktat ini diharapkan mampu untuk membantu mahasiswa dalam pemodelan dan penyelesaian dari masalah-masalah yang bisa dibawa ke sistem persamaan/pertidaksamaan linear. Dari perspektif pengajar, diktat ini diharapkan dapat memberikan ide-ide dari pemodelan dan penyelesaian yang mudah bagi masalah program linear.

Salatiga, 30 Juli 2021

Pengampu

Didit B. Nugroho, D.Sc.

NIDN: 0612027701

DAFTAR ISI

BAB 1: Model Program Linear

1.1 Pengertian dan Model Program Linear

Program Linear (PL) adalah suatu proses mengubah situasi kehidupan nyata menjadi model matematika yang terdiri dari suatu fungsi tujuan linear yang harus dimaksimalkan atau diminimalkan terhadap sejumlah kendala linear terbatas dan selanjutnya mengembangkan suatu algoritma untuk menyelesaikan model matematika yang terbentuk.

Kata sifat "linear" dalam PL berarti bahwa semua fungsi matematis yang digunakan dalam model harus berupa fungsi linear. Kata "program" pada dasarnya adalah sinonim untuk rencana. Jadi PL melibatkan perencanaan kegiatan untuk mendapatkan hasil terbaik di antara semua alternatif yang layak.

1.2 Model Program Linear

Bentuk umum model matematika yang merepresentasikan permasalahan program linear adalah sebagai berikut. Dicari $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memaksimalkan atau meminimalkan fungsi linear

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.1}$$

dengan syarat-syarat linear

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\{\leq=\geq\}b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\{\leq=\geq\}b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\{\leq=\geq\}b_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

dan batasan tak negatif

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \tag{1.3}$$

Dalam model di atas, komponen c_j, a_{ij}, dan b_i adalah konstanta-konstanta yang diketahui. Variabel x_1, x_2, …, x_n adalah penyelesaian model yang disebut **variabel keputusan**. Fungsi linear (1.1) disebut **fungsi tujuan**. Dalam hal ini, minimalisasi Z setara dengan maksimalisasi –Z. Syarat-syarat di (1.2) disebut **kendala**, dimana hanya satu dari ketiga tanda ≤, =, dan ≥ yang dikenakan pada kendala. Kendala dengan tanda ≥ dimungkinkan untuk dikonversi menjadi tanda ≤ hanya dengan mengalikan kedua sisi dengan –1.

Sebagai contoh, memaksimalkan model PL hanya dengan kendala '≤' dan batasan tak negatif, dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \text{Maks.:} \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{Kendala:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Menggunakan tanda penjumlahan '∑', model di atas dapat ditulis sebagai

Maks.: $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Kendala: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\, i = 1, \dots, m$

$x_j \geq 0,\, j = 1, \dots, n$

Cara lainnya yaitu mengekspresikan dalam notasi matriks seperti berikut ini. Dimisalkan '^{t}' menyatakan transpos dari suatu matriks, dan diambil

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t,\ \boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^t,\ \boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t, \text{ dan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Model PL dapat dituliskan sebagai

Maks.: $Z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x}$

Kendala: $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Model di atas disebut model PL baku. Matriks *A* disebut matriks koefisien, vektor ***c*** disebut vektor tujuan, dan vektor ***b*** disebut vektor ruas kanan model.

Interpretasi model PL dalam hal alokasi optimal untuk sumber daya yang terbatas terhadap kegiatan-kegiatan bersaing dapat dilihat seperti berikut ini. Dimisalkan *n* item akan diproduksi oleh sebuah perusahaan. Variabel keputusan x_1, x_2, …, x_n mewakili banyaknya unit (satuan) dari setiap item yang akan produksi selama periode waktu tertentu. Untuk produk ke-*j*, c_j menyatakan keuntungan yang diperoleh per unit selama periode tertentu. Banyaknya sumber daya yang relevan yaitu *m*, sehingga setiap *m* pertidaksamaan linear sesuai dengan suatu batasan pada ketersediaan dari salah satu sumber daya. Komponen b_i adalah banyaknya sumber daya yang tersedia untuk produk *n*. Komponen a_{ij} adalah banyaknya sumber daya yang diperlukan oleh setiap unit produk *i*. Batasan tak negatif ($x_j \geq 0$) memastikan bahwa tidak ada produksi negatif.

Nilai (x_1, x_2, …, x_n) yang semua batasannya (1.2) dan (1.3) disebut solusi layak. Solusi layak memaksimalkan Z di (1.1) (atau meminimalkan dalam kasus minimisasi) disebut fungsi optimal.

1.3 Presentasi Grafis Model LP

Presentasi Grafis Model LP.

Berikut contoh dari dua variabel keputusan

P_1 :

Maks.: $Z = 2x_1 + 3x_2$

Kendala : $x_1 + 3x_2 \leq 18$ (i)

$x_1 + x_2 \leq 8$ (ii)

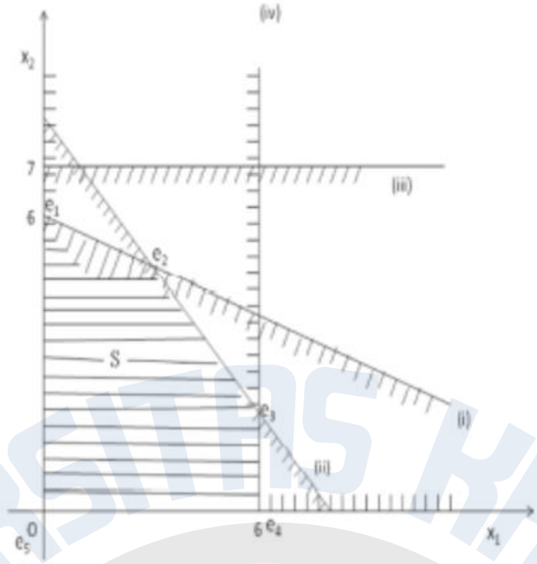
$x_1 \leq 6$ (iii)

$x_2 \leq 7$ (iv)

$x_1 \geq 0$ (v)

$x_2 \geq 0$ (vi)

Pertidaksamaan (i) hingga (iv) dan non-negatif (v) dan (vi) memberikan area 'S' yang akan ditunjukan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1: Permasalahan P_1.

1.4 Daerah Fisibel

Bentuk umum dari LPP adalah seperti yang diberikan dalam persamaan (1.1) sampai (1.3)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.1}$$

Berdasarkan pembatas linear :

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\leq = \geq\} b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\leq = \geq\} b_2 \\ &a_{31}x_1 + a_{13}x_2 + ... + a_{3n}x_n \{\leq = \geq\} b_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\leq = \geq\} b_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dan pembatasan non-negatif :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{1.3}$$

Jadi diinginkan untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan. Dilakukan dengan memasukkan variabel tambahan dalam soal yang disebut variable slack atau surplus.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_{i,} i = 1, \ldots\ldots, m'$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_{i,} i = m'+1, \ldots\ldots, m''$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_{i,} i = m''+1, \ldots\ldots, m$$

Dimisalkan variabel non-negatif $x_{n+i} (i = 1, \ldots\ldots, m'')$ maka

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_{i,} i = 1, \ldots\ldots, m'$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_{i,} i = m'+1, \ldots\ldots, m''$$

Dimisalkan $n + m'' = \bar{n}$

maka himpunan batasan m dalam variabel $\bar{n}$ dapat ditulis sebagai : $\bar{A}\underline{x} = \underline{b}$

Dimana $\underline{\bar{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_n)', \underline{b} = (b_1, \ldots\ldots, b_m)'}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m'1} & \cdots & a_{m'n} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m'+11} & \cdots & a_{m'n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m''1} & \cdots & a_{m''n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

variabel $x_{n+i}, i = 1, \ldots., m'$ kita sebut variabel slack dan variabel $x_{n+1}, i = m'+1, \ldots\ldots, m''$ disebut dengan variabel surplus

Contoh

Daerah dari sebuah LPP ditentukan oleh ketidaksetaraan

$2x_1 - x_2 \leq 4, x_1 - x_2 \geq -3, 3x_1 - 2x_2 \leq 6, x_1, x_2 \geq 0$, tentukan solusi dasar dengan X_1 sebagai basisnya;

Penyelesaian :

- *Dengan memasukkan variabel slack ,pertidaksamaan dapat diubah menjadi persamaan berikut*

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$-x_1 + x_2 \ldots + x_4 = 3$$
$$3x_1 - 2x_2 \ldots\ldots + x_5 = 6$$

- *Solusi titik ekstrim awal diperoleh* $x_3 = 4, x_4 = 3, x_5 = 6, x_1 = 0, x_2 = 0$, *jika dengan menggunakan vektor dari matriks koefisien dimana* $a_1, \ldots, a_5$ *dan R.H.S dengan* a_0 *maka solusi awal dapat dinyatakan sebagai*

$$0a_1 + 0a_2 + 4a_3 + 3a_4 + 6a_5 = a_0$$
$$4a_3 + 3a_4 + 6a_5 = a_0 \ldots\ldots (i)$$

- *Untuk mendapatkan solusi titik ekstrem lainnya adalah dengan representasi* a_1 *dalam vektor basis , maka diperoleh :*

$$2a_3 - a_4 + 3a_5 = a_1 \ldots\ldots\ldots (ii)$$

- *Selanjutnya dapat mengalikan persamaan (ii) dengan θ dan mengurangkan dengan persamaan (i)*

dan diperoleh

$$(4-2\theta)a_3 + (3+\theta)a_4 + (6-3\theta)a_5 + \theta a_1 = a_0$$

dan diperoleh

$$\theta = \min\left(\frac{4}{2}, \frac{6}{3}\right) = 2$$

maka dapat disubtitusikan ke dalam persamaan dan diperoleh :

$$(4-2\theta)a_3 + (3+\theta)a_4 + (6-3\theta)a_5 + \theta a_1 = a_0$$
$$(4-2[2])a_3 + (3+[2])a_4 + (6-3[2])a_5 + [2]a_1 = a_0$$
$$5a_4 + 2a_1 = a_0$$
$$atau$$
$$2a_1 + 0a_2 + 0a_3 + 5a_4 + 0a_5 = a_0$$

1.5 Variabel Dasar dan Tak Dasar

Consider in the LPP in the form

$$\text{Maks. :} \quad Z = \underline{c}'\underline{x} s.t, A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \qquad (1.4)$$

Dimana $m < n$ dan dimisalkan matriks A menjadi m dari persamaan $A\underline{x} = \underline{b}$ semuanya dijumlahkan dengan variabel slack dan A terdiri dari matriks identitas orde m yang pangkat

A menjadi m. dimisalkan matriks A sebagai A =(B,N) dimana B adalah m x m dan non singular , matriks A memiliki pangkat m. matriks N berorde m x (n-m). Untuk mengilustrasikan fenomena ini, kita lihat contoh masalah P1 yang diberikan di Bagian 1.3 setelah ditambahkan variabel slack adalah

Maks. : $Z = 2x_1 + 3x_2$

Kendala: $x_1 + 3x_2 \leq 18$ (i)

$x_1 + x_2 \leq 8$ (ii)

$x_1 \leq 6$ (iii)

$x_2 \leq 7$ (iv)

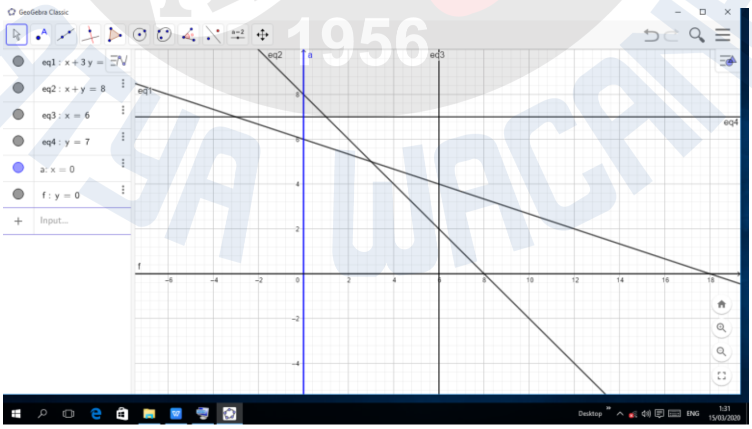
$x_1 \geq 0$ (v)

$x_2 \geq 0$ (vi)

Setelah ditambahkan dengan variabel slack akan menjadi :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_4 = 8 \\ x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_5 = 6 \\ x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_6 = 7 \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

Matriks A dari persamaan (1.4) berurutan 4 x 6. Untuk kesetaraan yang terkait dengan kendala di himpunan (1.5) sesuai dengan variabel zero slack misalnya $x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$ dan coresponden ke $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 8$ dan coresponden ke $x_4 = 0$. solusi dasar yang sesuai dengan matriks basis B orde 4 dengan B-1b $\geqq 0$



$\binom{6}{4} = 15$. Terdapat 15 kemungkinan cara untuk memilih matriks B dalam A , Hanya ada 5 yang sesuai dengan wilayah yang memungkinkan dengan megambil dua variabel non-dasar yang sama dengan nol.

	Non-basic variables	basic variables
e1 :	(x1=0, x3=0)	(x2, x4, x5, x6)
e2 :	(x4=0, x3=0)	(x1, x2, x5, x6)
e3 :	(x4=0, x5=0)	(x1, x2, x3, x4)
e4 :	(x2=0, x5=0)	(x1, x3, x4, x5)
e5 :	(x2=0, x1=0)	(x3, x4, x5, x6)

Misalkan e2 adalah perpotongan garis $x_1+x_2=8$ dan $x_1+3x_2=18$ yang sesuai dengan variabel slack x_4 dan x_3. dan dimana x_5 dan x_6 adalah variabel non-dasar adalah perpotongan garis $x_5=0$ dan $x_6=0$ maka variabel dasarnya adalah x_1, x_2, x_3, x_4 dengan basis yang terkait.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dengan} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Dan diperoleh solusi dasar yaitu (6,7,-9,-5,0,0) wich is infeasible.

1.6 Metode dan Alogritma Simplex

Digunakan sebagai salah satu teknik dalam menyelesaikan atau memecahkan persoalan linear Programming atau model program linear.

Metode Simplex (Model Maximization)		
F.T.	Max Z =	c1X1+...+ cnXn
F.K.		a11X1+...+a1nXn <= b1
		a21X1+...+a2nXn <= b2
		...
		am1X1+...+amnXn <= bn
		X1, X2,..., Xn >= 0

# F.T = Fungsi Tujuan
F.K = Fungsi

 Model Matematis Linear

Contoh 1.1:

F.T. Max Z =	8x1+6x2	(dalam Rp 1000)
F.K.		
Bahan A	4x1+2x2<=60	
Bahan B	2x1+4x2<=48	
	x1,x2>=0	

Contoh 1.2:

F.T. Max Z = 3x1+2x2

F.K.

2x1+x2<=18

2x1+3x2<=42

3x1+x2<=24

x1,x2>=0

Prosedur Big M

Maksimalkan $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$

s.t, $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+j}=b_j$, $i=1,\ldots,m$

dan

$x_j \geq 0, j=1,\ldots,n+m$

Dimana M adalah bilangan positif yang besar. Variabel x_{n+j},$i=1,\ldots,m$ diperkenalkan ke masalah disebut variabel buatan. Solusi awal dari masalah tambahan adalah

$$x_1=\ldots=x_n=0,\ x_{n+i}=b_i,\ i=1,\ldots,m$$

BAB 2: Analisis Sensitivitas

2.1 Representasi Matriks Dari Metode Simplex

Untuk merepresentasikan matriks dari metode simplex, yang pertama kita dapat menyatakan tablo dengan…

A	b
c	z_0

Setelah rangkaian langkah *pivot*, kita mendapatkan bentuk kanoniknya seperti berikut ini :

A*	b*
c*	z_0^*

Contoh: *Tablo metode simplex*

	x1	x2	x3	x4	x5	
x1	1	2	3	4	5	31
x2	6	7	8	9	10	32
	11	12	13	14	15	33
.						
.						
.						
x1	16	17	18	19	20	34
x3	21	22	23	24	25	35
	26	27	28	29	30	36

Dari tablo simplex diatas, kita bisa merepresentasikan dalam matriks menjadi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} \qquad z_0 = (33)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix} \qquad b^* = \begin{pmatrix} 34 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$c^* = \begin{pmatrix} 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{pmatrix} \qquad z_0^* = (36)$$

Jika $A^{(j)}$, maka j adalah j(m) kolom di A, sehingga

$B = \{A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_m}\}$

Kita juga mengetahui $1 \times m$ baris vector, sehingga

$c_B = [c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m}]$

Contoh: Jika kita lihat dalam tablo di contoh sebelumnya pada kolom x_1 & x_3, maka…

$$B = [A^{(1)} ; A^{(3)}] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad c_B = [11 , 13]$$

Untuk menentukan hasil rangkaian dari langkah pivot simplex, kita bisa menghitungnya dari matriks A, b, c, dan z_0 yang ada dengan cara sebagai berikut…

1. $\boldsymbol{A^* = B^{-1} A}$
2. $\boldsymbol{b^* = B^{-1} b}$
3. $\boldsymbol{c^* = c - c_B B^{-1} A = c - c_B A^*}$
4. $\boldsymbol{z_0^* = z_0 - c_B B^{-1} b = z_0 - c_B b^*}$

Contoh 2.1:

TABEL SIMPLEX

	X1	X2	X3	X4	X5	
X3	-6	0	1	-2	2	6
X2	-3	1	0	6	3	15
	5	0	0	3	-2	-21
. . .			(skip)			
X5	0	1/2	-1/4	7/2	1	6
X1	1	1/6	-1/4	3/2	0	1
	0	1/6	3/4	5/2	0	-14

Dari tablo simplex diatas, kita bisa merepresentasikan dalam matriks menjadi :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$c = (5 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad -2) \qquad z_0 = (-21)$$

$$B = [A^{(5)}\,; A^{(1)}] = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad c_B = [\,-2\,,\ 5\,]$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/4 & 7/2 & 1 \\ 1 & 1/6 & -1/4 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c^* = (0 \quad 1/6 \quad 3/4 \quad 5/2 \quad 0) \qquad z_0^* = (-14)$$

2.2 Perubahan Harga (Koefisien Fungsi Tujuan)

Diasumsikan bahwa $\boldsymbol{c}$ diubah menjadi $\boldsymbol{c'}$.

Untuk masalah yang dihasilkan, dasar utama solusi yang sesuai dengan basis B masing-masing adalah,

$$\boldsymbol{x'_B = B^{-1}b} \ = \ \boldsymbol{\bar{x}_B \geq 0}, \quad \boldsymbol{z'_N = c'_N - N^T y'}, \quad \boldsymbol{y' = B^{-T} c'_B}$$

dimana jika $\boldsymbol{z'_N} \geq \boldsymbol{0}$, maka itu hanyalah solusi optimal primal dan dasar ganda untuk masalah baru.

Jika diasumsikan $\boldsymbol{z'_N} \ngeq \boldsymbol{0}$ dalam kasus ketika perubahan biaya sedikit, maka perubahan yang sesuai dalam solusi juga harus sedikit. Oleh karena itu, diharapkan bahwa jumlah pengulangan yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah baru rendah jika dimulai dari B.

Secara khusus, perubahan biaya non-dasar hanya menyebabkan perubahan dalam pengurangan biasa yang terkait. Yang secara khusus dapat diasumsikan

$$\boldsymbol{c'_j = c_j + \Delta c_j}, \quad \boldsymbol{j} \in \mathbf{T} \subset \mathbf{N}.$$

Dalam hal ini, jelas bahwa $y' = \bar{y}$, Oleh karena itu hanya pengurangan biaya berikut yang perlu dihitung.

$$\boldsymbol{z'_j} \ = \ \boldsymbol{c'_j - a_j^T \bar{y}} \ = \ \boldsymbol{\bar{z}_j + \Delta c_j}\,, \quad \boldsymbol{j} \in \mathbf{T}$$

Dalam beberapa aplikasi, diperlukan penentu rentang perubahan untuk menjada optimalitas B dengan perubahan biaya.

$$\boldsymbol{c'} = \boldsymbol{c} + \tau \Delta \mathrm{c}, \tag{2.1}$$

dimana $\mathbf{\Delta c \neq 0}$, maka itu adalah vektor tertentu dan merupakan skalar yang akan ditentukan.

Jelas bahwa B adalah dasar yang optimal untuk masalah yang dihasilkan jika biaya baru yang dikurangi tidak negatif, yaitu…

$$z'_N = c_N + \tau\Delta c_N - N^T B^{-T}(c_B + \tau\Delta c_B) = \bar{z}_N + \tau\Delta z_N \geq 0\,, \qquad (2.2)$$

dimana

$$\Delta z_N = \Delta c_N - N^T B^{-T}\Delta c_B.$$

dengan mengenalkan

$$\beta = \min\left\{-\frac{\bar{z}_j}{\Delta z_j} \;\middle|\; \Delta z_j < 0, \quad j \in N\right\},$$

$$\alpha = \min\left\{\frac{\bar{z}_j}{\Delta z_j} \;\middle|\; \Delta z_j < 0, \quad j \in N\right\},$$

Kemudian nilai nonnegative dari τ memenuhi ketidaksamaan (2.2), yang ditentukan oleh

$$\tau \leq \beta$$

Sedangkan nilai nonpositif untuk memenuhi

$$|\tau| \leq \alpha$$

Akibatnya, diketahui bahwa basis / solusi optimal akan tetap optimal jika τ memenuhi

$$-\alpha \leq \tau \leq \beta \qquad (2.3)$$

Contoh 2.2:

Diketahui sebuah masalah :

$$\min \; f = -4x_1 - 3x_2 - 5x_3\,,$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad + x_5 &= 15\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 12\\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 \quad + x_7 &= 3\\
2x_1 + x_2 \quad + x_6 &= 9
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0\,, \quad j = 1, \ldots, 7,$$

Didapatkan tablo simplex optimal sebagai berikut

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS
0	0	1	0	1/3	- 1/3	0	2
0	0	0	1	- 7/12	- 1/6	- 1/4	1
0	1	0	0	1/2	0	1/2	9

1	0	0	0	- 1/4	1/2	- 1/4	0
0	0	0	0	2 1/6	1/3	1/2	37

Dari tabel diatas, kita dapat memperoleh optimal basis dan non-basis…

$$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}\} \qquad \boldsymbol{N} = \{\mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}$$

Sesuai dengan solusi optimal dan nilai obyektif

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{0}, \mathbf{9}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\ )^{\boldsymbol{T}} \qquad \bar{\boldsymbol{f}} = -\mathbf{37}$$

$$\boldsymbol{c} = (-\mathbf{4}, -\mathbf{3}, -\mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}} \qquad \bar{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{N}} = \left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{T}}$$

Diambil

$$\Delta\boldsymbol{c} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}} \quad , \quad \text{dan}$$

$$\Delta\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} = (\ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}} \qquad \Delta\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}} = (\ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$$

Sehingga $\Delta\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{N}}$ dapat dihitung sebagai berikut

$$\Delta\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}^{-\boldsymbol{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/4} \\ -\mathbf{1/2} \\ \mathbf{1/4} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{min} \left\{ \frac{\left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}\right)}{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)} \ , \quad \frac{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)} \right\} = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{min} \left\{ \frac{\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)}{\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)} \right\} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Sehingga agar solusi optimal tetap optimal jika

$$-\mathbf{2} \ \leq \ \tau \ \leq \ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Karena dari persamaa (6.1) dan $\Delta\boldsymbol{c} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$, dapat diketahui bahwa solusi optimal akan tetap optimal saat c1 dan x1 memenuhi…

-6 ≤ c1' ≤ -3 1/3

Sebagai contoh, ketika biaya x1 ditetapkan ke batas bawah 6, maka sesuai persamaan (2.2).

$$\boldsymbol{z'_N} = \left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{T}} + (-\mathbf{2})\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)^{\boldsymbol{T}} = \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, \mathbf{0}\right)^{\boldsymbol{T}} \geq \mathbf{0},$$

2.3 Perubahan Ruas Kanan

Contoh 2.3:

Pertimbangkan masalah pencampuran dari memberi makan stok. Diberikan tabel berikut tentang nutrisi per pound.

	Nutrisi A	Nutrisi B	Harga($)
Makanan 1(x1)	10	3	16c/lb
Makanan 2(x2)	4	5	14c/lb
Minimum daily	124	60	

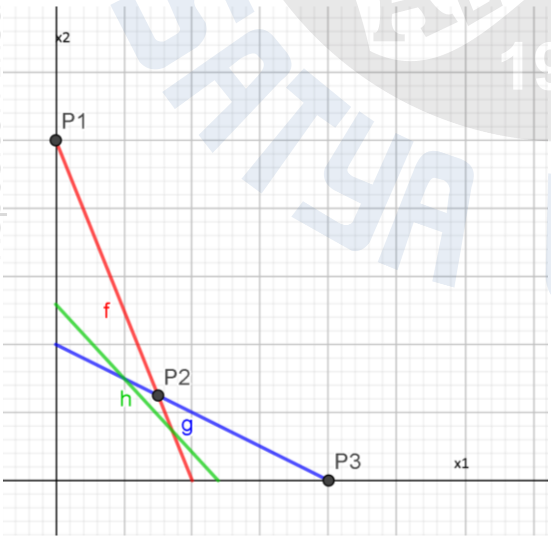
Variabel x1,x2: jumlah makanan 1 dan 2 untuk digunakan setiap hari

Memperkecil $16x_1 + 14x_2 = z$ menjadi

$$10x_1 + 4x_2 \geq 124$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Dengan metode grafik: Kita memiliki 3 garis:

L1: $10x_1 + 4x_2 = 124$

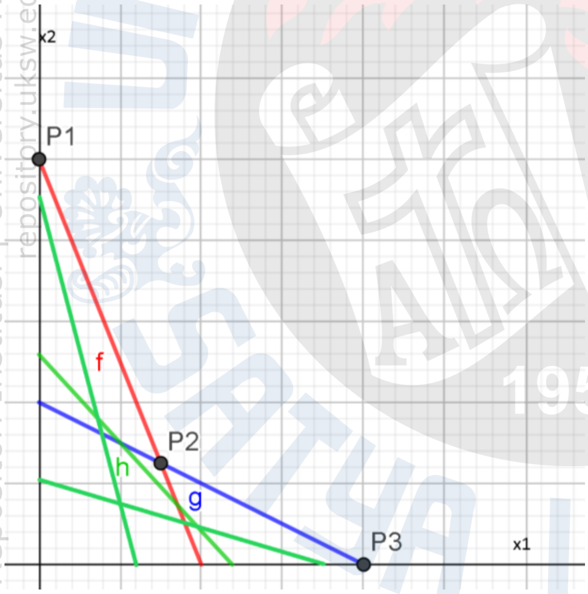
L2: $3x_1 + 5x_2 = 60$

L3: $16x_1 + 14x_2 = 112$
3 simpul dari wilayah yang layak:
$P_1: (0{,}32), P_2: (10{,}6), P_3: (20.0)$
Min diperoleh di $P_2: (10{,}6)$,dengan $z_{min} = z(P2) = 244c$
Kemiringan tiga garis :

$$s_1 = -\frac{10}{4} = -2.5, \qquad s_2 = -\frac{3}{5} = -0.6, \qquad s_3 = \frac{16}{14} = -\frac{8}{7}$$

Kita lihat bahwa $s_1 < s_2$dan $s_1 < s_3 < s_2$, Maka P2 adalah titik optimal.
Pertanyaan 1: Sekarang misalkan biaya dari dua makanan bisa bervariasi. Bagaimana ini mempengaruhi minimum?
Jawab: Misalkan $c_1, c_2 \geq 0$ menjadi harga makanan 1 dan 2.
Fungsi objektif yang baru adalah:
$c_1x_1 + c_2x_2 = z$
Kemiringan L_3 adalah $L_3 = -\frac{c1}{c2}$
Kita melihat dari grafik bahwa titik optimal bergantung pada hubungan kemiringan.

- $Jika\ S_3 \leq S_1 := P_1$
- $Jika\ S_3 \geq S_2 := P_3$
- $Jika\ S_1 \leq S_3 \leq S_2 := P_2$



Biaya harian minimum =

$z(P_1) = 31C_2, \qquad Jika -\frac{C_1}{C_2} \leq -\frac{5}{2}\ yaitu\ \frac{C_1}{C_2} \geq \frac{5}{2}$

$z(P_2) = 10C_1 + 6C_2, \qquad Jika\ \frac{3}{5} - \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{5}{2}$

$z(P_3) = 20C_1, \qquad Jika\ \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{3}{5}$

Jadi mengingat harga c1, c2, kami dapat menemukan biaya minimum dan solusi minimum. Hasilnya hanya bergantung pada rasio $\frac{C_1}{C_2}$.

Contoh 2.4:

Membuat perahu A dan B dengan menggunakan sumber daya.

	Perahu A(x_1)	Perahu B(x_2)	Batas
Aluminium	50	30	2000
Waktu mesin	6	5	300
Tenaga kerja	3	5	200
Harga	50	60	

$Max\ z = 50x_1 + 60x_2 \leq 2000\ bergantung\ pada\ x_1, x_2 \geq 0\ dan$
$50_{x1} + 30_{x2} \leq 2000$
$6_{x1} + 5_{x2} \leq 300$
$\cdot_{x1} + 5_{x2} \leq 200$

Dengan metode simpleks, diperoleh:
$z_{max} = 2750\ di\ x^* = (25{,}25)$

Pertanyaan: Bagaimana perubahan harga aluminium mempengaruhi solusinya?
Jawab:
Membentuk Dual:
(D): $Min\ 2000y_1 + 300y_2 + 200_{y3} = v, y_1, y_2, y_3 \geq 0\ dan$

$$50_{y1} + 6y_2 + 3y_3 \geq 50$$
$$30_{y1} + 5y_2 + 5y_3 \geq 60$$

Solusi:
$v_{min} = 2750\ di\ y^* = \left(\frac{7}{16}.0, \frac{75}{8}\right).$
Dengan teori dualitas, kita memiliki

$$z_{max} = v_{min} = 2000.\frac{7}{16} + 300.0 + 200.\frac{75}{8}$$

Kesimpulan: Selama y^* adalah titik optimal untuk dual, peningkatan satu unit dari 2000 akan menyebabkan peningkatan $\frac{7}{16}$ di z_{max}.
Pengamatan: dalam

$$z_{max} = 2000.\frac{7}{16} + 300.0 + 200.\frac{75}{8}$$

Perubahan waktu mesin 300 tidak berpengaruh pada z_{max}. Mengapa?

Lihatlah kelonggaran aslinya pada titik optimal x *:
Aluminium : 2000 – 2000 = 0
Waktu mesin : 300 – 275 = 25 > 0
Tenaga kerja : 200 – 200 = 0

Waktu mesin berada di bawah sumber daya yang digunakan. Meningkatkannya tidak akan mengubah produk / keuntungan.

Notasi : $y^* = \left(\frac{7}{16}, 0, \frac{75}{8}\right)$ juga disebut harga bayangan. Ini menunjukkan tingkat perubahan nilai optimal sehubungan dengan perubahan batasan

2.4 Perubahan dalam Fungsi Tujuan

<u>x_i adalah variable nonbasic</u>

Pertimbangkan algoritma simpleks untuk:

A	b
C	z_0

tabel awal

A*	b*
c*	z_0^*

tabel akhir

Disalkan x^*menunjukkan solusi layak dasar yang optimal. Bagaimana jika salah satu c_1 di c berubah, bagaimana z_0^* berubah?

Selama

$$c^* = c - c_B A^* \geq 0 \quad kemudian \quad z_0^* = z_0 - c_B b^*$$

hanya $c_B \geq 0$ yang mengubah nilai z_0^*, tetapi bagian lain dari c mempengaruhi $c^* \geq 0$

Contoh 2.5:

$max\ z = 11x_1 + 4x_2 + x_3 + 15x_4, \qquad x_i \geq 0\ dan$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 28 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 \leq 50 \end{cases}$$

Tabel pengerjaan

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X5	3	1	2	4	1	0	28
X6	8	2	-1	7	0	1	50
	-11	-4	-1	-15	0	0	0
X4	3/4	1/4	½	1	1/4	0	7
X6	11/4	1/4	-9/2	0	-7/4	1	1
	1/4	-1/4	13/2	0	15/4	0	105
X4	-2	9	5	1	2	-1	6
X2	11	1	-18	0	-7	4	4
	3	0	2	0	2	1	106

$(x_5, x_6 \quad adalah\ variabel\ slack)$

Bagaimana jika mengubah koefisien $c_1 = -11$

- *x_1 bukanlah variabel dasar dalam tablo akhir. jadi perubahan tidak akan mempengaruhi z_0^**
- *ini akan menyebabkan perubahan pada c_i^* di tabel akhir.*

Ingat c_i^* = c_1-$c_B A^*$, dan kami dapat memverifikasi bahwa 3 = -11-$c_B A^{*(1)}$:

3 = -11 - [- 15 -4] $\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}$ = -11- (30-44) = - 11 - (- 14) = 3

Kita membutuhkan $c_i^* \geq 0$, yaitu, $c_1 \geq c_B A^{*(1)}$ = - 14

Kesimpulan:

- *jika koefisien di depan x dalam soal awal ≤ 14, maka solusi optimal tidak berubah*
- *jika perubahan lebih dari 3 unit. (yaitu, c_i^*<0 baru). Maka diperlukan komputasi baru dari algoritma simpleks*

Argumen serupa untuk c_i lain di mana x_i bukan merupakan variabel dasar

<u>x_1 adalah variable basic</u>

Kita sekarang mempertimbangkan kasus di mana x_1 adalah variabel dasar. pertimbangkan c_4 (di mana x_4 adalah variabel dasar), dan ubah menjadi c_4 = - (15 + λ). perubahan ini akan mengubah c_B:

$$c^* = c - c_B A^*$$
$$= [-11 \;\; -4 \;\; -1 \;\; -15 - \lambda \;\;\; 0 \;\; 0] - [-15 - \lambda \;\; -4]A^*$$
$$= [-11 \;\; -4 \;\; -1 \;\; -15 \;\; 0 \;\; 0] - [-15 \;\; -4]A^* + [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -\lambda \;\;\; 0 \;\; 0] + [\lambda \;\;\; 0]A^*$$
$$= [3 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1] + [-2\lambda \;\;\; 0 \;\; 5\lambda \;\;\; 0 \;\; 2\lambda \;\; -\lambda]$$
$$= [3 - 2\lambda \;\;\; 0 \;\; 2 + 5\lambda \;\;\; 0 \;\; 2 + 2\lambda \;\;\; 1 - \lambda]$$

Kita membutuhkan $c^* \geq 0$, yaitu,

$$\begin{cases} 3 - 2\lambda \geq 0 \\ 2 + 5\lambda \geq 0 \\ 2 + 2\lambda \geq 0 \\ 1 - \lambda \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda \leq 1.5 \\ \lambda \geq -0.4 \\ \lambda \geq -1 \\ \lambda \leq 1 \end{cases} \rightarrow -0.4 \leq \lambda \leq 1$$

selama -0,4 ≤ λ ≤1, titik solusi optimal tidak berubah, yaitu x * = (0,4,0,6) dengan

$$z_{max} = 4.4 + (15 + \lambda).6 = 106 + 6\lambda$$

Satu unit perubahan λ akan menyebabkan 6 unit berubah di z max. Analisis serupa berlaku untuk koefisien x_2!

Ringkasan:

Jika hanya satu dari koefisien c_i diubah menjadi c_i + λ:

- jika x_i bukan variabel dasar dalam tablo akhir:
  - z_0^* tidak terpengaruh selama $c_i^* \geq 0$
  - temukan rentang perubahan yang diizinkan untuk lamda oleh ci * = c_i-$c_B A^{*(i)} \geq 0$
- jika x_i adalah variabel dasar dalam tablo akhir:
  - z_0^* akan diubah z_0^* = c * x^*

- temukan rentang perubahan yang diizinkan dengan c * = c-$c_B A^* \geq 0$. (perhatikan bahwa ini adalah persamaan vektor, oleh karena itu, ada beberapa batasan.)

2.5 Penambahan Suatu Variabel

Asumsikan bahwa variabel x_{n+1} akan ditambahkan. Dimisalkan c_{n+1} dan a_{n+1} menjadi biaya yang terkait dan kolom, masing-masing. Program baru kemudian

$$\min c^T x + c_{n+1}x_{n+1}$$
$$s.t. Ax + a_{n+1}x_{n+1} = b, \quad x, x_{n+1} \geq 0$$

Jelas bahwa B adalah dasar yang layak untuk program baru, sesuai dengan solusi dasar yang layak

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Karena variabel x_{n+1} bukan basic, variabel sebelumnya sebenarnya adalah solusi optimal basic jika sesuai dengan biaya

$$\bar{z}_{n+1} = c_{n+1} - a_{n+1}^T \bar{y}$$

tidak negatif. Jika bukan ini berhasil, program baru dapat diselesaikan dengan metode simpleks, mulai dari B.

Contoh 2.6:

Diketahui bahwa untuk memprogram

$$\begin{aligned} \min f &= -x_1 - 2x_2 - 4x_4 + 3x_5, \\ s.t.\ \ 2x_1 &+ x_3 = 3 \\ x_1 &+ x_4 = 2 \\ -x_2 &+ x_5 = 0 \\ x_j \geq 0, &\quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

ada tablo simpleks optimal di bawah ini:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
2	0	1	0	0	3
1	0	0	1	0	2
0	-2	0	0	1	0
3	1				8

Selesaikan masalah, hasil dari program dengan menambahkan variabel x_6 , dengan $a_6 = (1, -2, 3)^T, c_6 = -2$

Solusi:

Basis optimal untuk program asli adalah $B = \{3,4,5\}$. $\bar{a}_6 = B^{-1}a_6 = (1, -2, 3)^T, \bar{y} = B^{-T}c_B = (0, -4, 3)^T, \bar{z}_6 = -2 - (1, -2, 3)(0, -4, 3)^T = -19$

Kita menyelesaikan program baru dengan algoritma simplex tablo. Simpleks awal tablo persetujuan dengan penduduk tablo optimal ke program yang dibangun, yaitu

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
2		1			1	3
1			1		-2	2
	-1			1	3*	
3	1				-19	8

Algoritma:

Iterasi 1:

1. $min\{3,1,-19\} = -19 < 0, q = 6.$

3. $I = \{1,3\} = \emptyset.$

4. *min {3/1, 0/3}=0, p=3.*

5. Kalikan baris 3 dengan 1/3, lalu tambahkan -1, 2, 19 kali baris 3 sampai baris 1,2,4, masing-masing:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
2	1/3*	1		-1/3		3
1	-2/3		1	2/3		2
	-1/3			1/3	1	
3	-16/3			19/3		8

Iterasi 2:

1. min{3,-16/3,19/3}= -16/3 < 0, q=2.

3. $I = \{1\} \neq \emptyset.$

4. min{3/(1/3)}, p=1.

5. Kalikan baris 1 dengan 3, lalu tambahkan 2/3, 1/3, 16/3 kali dari baris 1 sampai baris 2,3,4, masing-masing:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
6	1	3		-1		9
5		2	1			8
2		1			1	3
35	16			1		56

Iterasi 3:

1.min {35,16,1} ≥ 0. Solusi optimal dasar dan nilai tujuan:

$$\bar{x} = (0,9,0,8,0,3)^T, \quad \bar{f} = -56$$

Asumsikan algoritma simpleks memecahkan

A	b
c	z_0

A*	b*
c*	z_0^*

dengan x^* sebagai solusi layak dasar yang optimal

Apa yang terjadi jika kita menambahkan variabel baru dalam soal?

katakanlah, kami memiliki:

$$\min z = cx + c_{n+1}x_{n+1} \ \ subject\ to$$
$$[A, A^{(n+1)}].\begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = b$$

tabel baru, dengan langkah poros yang sama seperti pada 1, menjadi

$$\begin{array}{cc|c} A & A^{(n+1)} & b \\ \hline c & c_{n+1} & z_0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} A^* & A^{*(n+1)} & b^* \\ \hline c^* & c^*_{n+1} & z^*_0 \end{array}$$

di

$$A^{*(n+1)} = B^{-1}A^{(n+1)}$$
$$c^*_{n+1} = c_{n+1} - c_B B^{-1}A^{(n+1)}$$

observasi: jika x_{n+1} = 0, maka x^* adalah solusi dasar yang layak. tapi apakah masih optimal? tergantung.

- *jika $c^*_{n+1} \geq 0$, maka x^* tetap optimal, dan z^*_0 tidak berubah.*
- *jika c^*_{n+1} <0, maka diperlukan langkah-langkah pivot baru*

pertimbangkan contoh di bagian sebelumnya, dan kami menambahkan variabel baru.

$max\ z = 11x_1 + 4x_2 + x_3 + 15x_4 + 12x_7, \qquad x_i \geq 0\ dan$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_7 \leq 28 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_7 \leq 50 \end{cases}$$

catatan: x_5, x_6 akan ditambahkan sebagai variabel slack.

dari tablo simplex asli (lihat bagian sebelumnya), kami punya

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}, \quad c_B = [-15 \quad -4]$$

$$c^*_7 = c_7 - c_B B^{-1}A^{(7)} = -12 - [-15, -4]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = -1$$

karena c^*_7) <0, maka x^*asli tidak lagi optimal.

untuk menemukan solusi optimal baru, kami menghitung:

$$A^{*(7)} = B^{-1}A^{(7)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tambahkan ini ke tablo terakhir:

basis	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS
X4	-2	0	5	1	2	-1	1	6
X2	11	1	-18	0	-7	4	-1	4
	3	0	2	0	2	1	-1	106
X7	-2	0	5	1	2	-1	1	6
X2	9	1	-13	1	-5	3	0	10
	1	0	7	1	4	0	0	112

Nilai optimal baru adalah 112.

Cara alternatif untuk melihat bahwa x_7 akan memasukkan variabel dasar:

pertimbangkan ganda. kendala baru adalah (*): $3y_1 + 5y_2 \geq 12$.

solusi dari masalah awal adalah $y^* = (2,1)^t$ (dari tablo)

ini tidak memenuhi (*): 3.2 + 5.1 = 11 <12

slacknya adalah: 11-12 = -1 (catat ini sebagai coeff dari c^*_{n+1})
menyimpulkan: diperlukan lebih banyak iterasi pivot

2.6 Penambahan Suatu Kendala

Dalam kasus ini, masalah lama dapat dipandang sebagai relaksasi dari masalah baru. Jika solusi optimal $\bar{x}$ memenuhi kendala yang ditambahkan merupakan kondisi optimal yang cukup untuk masalah baru.

Asumsikan kondisi optimal tidak terpenuhi. Kemudian ada 2 kasus yang muncul :

(i) Menambahkan kendala ketidaksetaraan $V^T x \leq p$ sedemikisn rupa sehingga
$V^T \bar{x} = V_B^T x_B > p$

$$V_B^T x_B + V_N^T x_N + x_{n+1} = p$$

Contoh 2.7:
Diketahui sebuah masalah :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{min} \quad \boldsymbol{f = x_1 + x_2 - 3x_3},\\
&\textbf{s.t.} \quad \boldsymbol{-2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = -4}\\
&\qquad \boldsymbol{x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 5}\\
&\qquad \boldsymbol{-x_1 + 2x_3 + x_4 = -3}\\
&\qquad \boldsymbol{x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6,}
\end{aligned}$$

Dengan optimal basis $\boldsymbol{\bar{x} = \left(\frac{13}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 2, 0\right)^T}$

Dan tambahan kendala $\boldsymbol{-2x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_6 \leq -25}$

Ringkasan langkah-langkah penyelesaian :
Yang pertama yang kita harus lakukan adalah…
Mensubstitusi optimal basis ke kendala untuk mengecek / menverifikasi kendala tersebut tidak memenuhi.
Setelah terverifikasi tidak memenuhi, selanjutnya adalah…
Menambah kendala dengan variabel baru $(+\,x_{n+1}) \rightarrow (+\,x_7)$
Selanjutnya memasukkan kendala ke tablo dari masalah yang sudah ada.
Dengan metode dual simplex tablo akhir didapatkan, sehingga kita bisa mendapat solusi basic optimal dan nilai objective …

$$\boldsymbol{\bar{x} = \left(\frac{47}{3}, \frac{17}{2}, \frac{19}{3}, 0, \frac{21}{2}, 0, 0\right)^T}$$
$$\boldsymbol{\bar{f} = \frac{31}{6}}$$

(ii) Menambahkan batasan kesetaraan $V^T x = p$ sedemikian rupa sehingga
$V^T \bar{x} \neq p$. Jadi lebih baik untuk mengasumsikannya dengan.

$$V^T \bar{x} < p$$

Contoh 2.8:

$$\begin{aligned} &\min \quad f = -2x_1 - x_2\,, \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ &\qquad -x_1 - x_2 + x_5 = -3 \\ &\qquad x_j \geq 0\,, \quad j = 1, \ldots, 5, \end{aligned}$$

Dengan optimal basis $\bar{x} = (4\,, 2\,, 0\,, 0\,, 3)^T$

Dan tambahan kendala $-3x_1 - 4x_2 + x_4 + 3x_5 = -14$

Ringkasan langkah-langkah penyelesaian :

Yang pertama yang kita harus lakukan adalah…

Mensubstitusi optimal basis ke kendala untuk mengecek / menverifikasi kendala tersebut tidak memenuhi.

Setelah terverifikasi tidak memenuhi, selanjutnya adalah…

Menambah kendala dengan variabel baru $(-\,x_{n+1})$ → $(-\,x_6)$

Kemudian kita kalikan kendala tadi dengan -1.

Selanjutnya memasukkan kendala ke tablo dari masalah yang sudah ada.

Dengan metode dual simplex tablo akhir didapatkan, sehingga kita bisa mendapat solusi basic optimal dan nilai objective sebagai berikut…

$$\bar{x} = (0, 5, -2, 9)^T$$

Karena pada optimal basis masih memiliki nilai yang negative (-2)

Kita cek lagi pada persamaan x1, x2, x3, x4, dan x5

X1	X2	X3	X4	X5	RHS
0	0	0	2	1	0
0	1	0	-1	0	5
1	0	0	3	0	-2
0	0	1	-4	0	9
0	0	0	5	0	1

Karena pada x1, x2, x3, x4, dan x5 tidak memiliki hasil yang negative, maka contoh ini **TIDAK MEMILIKI SOLUSI.**

Contoh 2.9:

Diketahui sebuah masalah :

$$\begin{aligned} &\min \quad \text{(-z) with :} \\ &\text{s.t.} \quad -2x_1 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 = 6 \\ &\qquad 11x_1 + x_2 - 18x_3 - 7x_5 + 4x_6 = 4 \\ &\qquad 3x_1 + 2x_3 + 2x_5 + x_6 = 106 + (-z) \end{aligned}$$

Dengan teorema optimal $z_{max} = 106$ dicapai di $X^* = (0, 4, 0, 6, 0, 0)$

Part 1 :

Dan tambahan kendala $3x_1 + x_2 + 3x_4 \leq 20$

Ringkasan langkah-langkah penyelesaian :

Yang pertama yang kita harus lakukan adalah…

Mensubstitusi optimal basis ke kendala untuk mengecek / menverifikasi kendalatersebut tidak memenuhi.
Setelah terverifikasi tidak memenuhi, selanjutnya adalah…
Menambah kendala dengan variabel baru $(+\,x_{n+1}) \rightarrow (+\,x_7)$
Selanjutnya memasukkan kendala ke tablo dari masalah yang sudah ada.
Lalu masukkan ke dalam bentuk kanonik…
Dengan metode dual simplex tablo akhir didapatkan, sehingga kita bisa mendapat…

$$z_{max} = \frac{302}{3} \ \ attained\ at\ \ X^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{20}{3}, 4, 0\right)$$

Part 2 :
Dan tambahan kendala baru $4x_1 + x_2 + 4x_4 \geq 29$
Ringkasan langkah-langkah penyelesaian :
Yang pertama yang kita harus lakukan adalah…
Mensubstitusi optimal basis ke kendala untuk mengecek / menverifikasi kendalatersebut tidak memenuhi.
Setelah terverifikasi tidak memenuhi, selanjutnya adalah…
Menambah kendala dengan variabel baru $(-\,x_{n+1}) \rightarrow (-\,x_7)$
Selanjutnya memasukkan kendala ke tablo dari masalah yang sudah ada.
Lalu masukkan ke dalam bentuk kanonik…
Dengan metode dual simplex tablo akhir didapatkan, sehingga kita bisa mendapat…
Karena pada optimal basis masih memiliki nilai yang negative (-7),
Kita cek lagi pada persamaan x1, x2, x3, x4, dan x5

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	
x4	0	0	1	1	0	-1	-2	8
x2	0	1	**4**	0	4	4	11	**-7**
x1	1	0	-2	0	-1	0	-1	1
	0	0	8	0	5	1	3	103

Karena pada x1, x2, x3, x4, dan x5 tidak memiliki hasil yang negative, maka contoh ini **<u>TIDAK MEMILIKI SOLUSI.</u>**

Part 3 :
Dan tambahan kendala baru $x_1 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 - x_6 = -18$
Ringkasan langkah-langkah penyelesaian :
Yang pertama yang kita harus lakukan adalah…
Mensubstitusi optimal basis ke kendala untuk mengecek / menverifikasi kendalatersebut tidak memenuhi.
Setelah terverifikasi tidak memenuhi,
Selanjutnya memasukkan kendala ke tablo dari masalah yang sudah ada.
Lalu masukkan ke dalam bentuk kanonik…
Dengan metode dual simplex tablo akhir didapatkan, sehingga kita bisa mendapat…

$$z_{max} = 96 \ \text{ dicapai di } \ X^* = (0, 24, 0, 0, 4, 2)$$

BAB 3: Teori Dualitas

3.1 Pasangan Primal-Dual

Diambil m_0 kendala dari $Max\ Z = c'x$, $Ax \leq b, x \geq 0$ menjadi ketaksamaan dan sisa $m - m_0$ jadi kesamaan. Himpunan $M = \{1,2, \dots, m\}$ menjadi $M = \{M_0, \ \underline{M}_0\}$ dimana $M_0 = \{1, \dots, m_0\}$ dan $\underline{M}_0 = \{m_{0+1}, \dots, m\}$. Juga himpunan $N = \{1, \dots, n\}$ menjadi $N = \{N_0, \ \underline{N}_0\}$ dimana $N_0 = \{1, \dots, n_0\}$ dan $\underline{N}_0 = \{n_{0+1}, \dots, n\}$.

Primal

$$Max\ Z = \sum_{j \in N} c_j x_j$$

Kendala

$\sum_{j \in N} \ a_{ij} x_j \leq b_i, i \epsilon\ M_0$

$\sum_{j \in N} \ a_{ij} x_j = b_i, i\ \epsilon\ \underline{M}_0$

$x_j \geq 0, j\ \epsilon\ N_0$

Dan $x_j\ bebas,\ j\ \epsilon\ N_0$

Dual

$$Min\ Z = \sum_{i \in M} b_i y_i$$

Kendala

$y_i \geq 0, i\epsilon\ M_0$

Dan $y_i\ bebas\ \ i\ \epsilon\ \underline{M}_0$

$\sum_{i \in M} \ a_{ij}\ y_i \geq c_j, \ \ j\ \epsilon\ N_0$

$\sum_{i \in M} \ a_{ij}\ y_i = c_j, \ \ j\ \epsilon\ \underline{N}_0$

Perhatikan bahwa ketaksamaan satu program selaras dengan variabel non-negatif dari program lainnya dan kesamaan program yang satu sesuai dengan variabel tidak tertutup dari program lainnya.

Contoh 3.1:

Menghitung primal dalam bentuk

$$Max\ 3x_1 - x_2 - 2x_3$$

Kendala

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \qquad (4x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -3)$$

$$2x_1 - x_3 = -1$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

Dualnya ditulis sebagai

$$Min\ 11y_1 - 3y_2 - y_3$$

Kendala

$$y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 3$$

$$-2y_1 - y_2 \geq -1$$

$$y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -2$$

$y_1, y_2 \geq 0$

Sebagai kendala ketiga dalam primal adalah persamaan, variabel y_3 yang sesuai dalam dual adalah tidak dibatasi di tanda. Selanjutnya, variabel x_1 bebas dalam primal sehingga kendala pertama dalam dual adalah persamaan.

Korespondensi antara masalah utama dan ganda diringkas ke tabel berikut:

Masalah Primal		**Masalah Dual**	
Fungsi objektif	**Minimum**	**Fungsi objektif**	**Maksimum**
Variabel	Non-negatif Non-positif bebas	Kendala	$\leq$ $\geq$ $=$
Kendala	$\geq$ $\leq$ $=$	Variabel	Non-negatif Non-positif bebas

3.2 Dual Simplex

Algoritma dual simplex : Bentuk Tableau

Inisial: sebuah tablo digital ganda yang mudah dikerjakan.Algoritma ini memecahkan masalah LP standar.

1. Pilih indeks baris poros $p \in arg\ arg\ \{\underline{b_i}|\ i = 1, \dots., m\}$.
2. Berhenti jika $\underline{b_p} \geq 0$.
3. Berhenti jika $J = \{ j \in N \mid \underline{a}_{p\,j} < 0\} = \emptyset$
4. Tentukan kolom poros $q \in arg\ arg\ -\underline{z}_j/\underline{a}_{p\,j}$
5. Ubah $\underline{a}_{p\,q}$ dengan 1, dan eliminasi
6. Hilangkan bukan nol lainnya dalam kolom dengan transformasi dasar.
7. Kembali ke langkah 1.

Algoritma Dual Simplex

Pertama : (B, N), $B^{-1} \cdot \underline{z}_N \geq 0, \underline{x}_B = B^{-1}b$ dan $\underline{f} = c_B^T \underline{x}_B$. Algoritma ini memecahkan masalah LP standar.

1. Pilih indeks baris $p \in \arg\min \{\underline{x}_{j_i} | i = 1, \ldots, m\}$.
2. Berhenti jika $\underline{x}_{j_p} \geq 0$ (optimal).
3. Hitung $\sigma_N = N^T B^{-T} e_p$.
4. Berhenti jika $J = \{j | \sigma_j < 0, j \in N\} = \emptyset$ (*infeasible problem*).
5. Menentukan β dan indeks kolom q seperti
$$\beta = -\underline{z}_q \,/\, \sigma_q = -\underline{z}_j \,/\, \sigma_j.$$
6. Memasangkan $\underline{z}_{j_p} = \beta$ dan memperbaharui $\underline{z}_N = \underline{z}_N + \beta\sigma_N$,$\underline{f} = \underline{f} - \beta\underline{x}_{j_p}$ jika $\beta \neq 0$.
7. Hitung $\underline{a}_q = B^{-1} a_q$.
8. Memperbaharui dari $\underline{x}_B = \underline{x}_B - \alpha\underline{a}_q$, $\underline{x}_q = \alpha$, dimana $\alpha = \underline{x}_{j_p} / \sigma_q$.
9. Memperbaharui B^{-1} dari (3.23).
10. Memperbaharui (B, N) dari pertukaran j_p dan q.
11. Balik ke langkah 1.

Sebaliknya, algoritma di atas dapat diperoleh dengan memecahkan masalah dual itu sendiri sebagai berikut. Perhatikan problem dual ini.

$$(D) \quad g = b^T y\,,$$
$$s.t. \quad A^T y \leq c$$

.Ditentukan $(B, N), B^{-1}$. Sangat mudah untuk membuktikan bahwa $\underline{y} = B^{-1}\, c_B$ memenuhi kendala dual yaitu :

$$\underline{z}_B = c_B - B^T \underline{y} = 0, \qquad \underline{z}_N = c_N - N^T \underline{y} \geq 0. \tag{3.1}$$

$\underline{y}$ adalah solusi dasar dual yang layak.

$$D = \{A^T y \leq c\}.$$

Dalam konteks primal simplex, $\underline{y}$ biasanya disebut “simplex menggandakan”.

Perhatikan solusi dasar primal.

$$\underline{x}_B = B^{-1} b, \qquad \underline{x}_N = 0.$$

Jika $\underline{x}_B \geq 0$, lalu $\underline{x}$ dan $(\underline{y}, \underline{z})$ memenuhi kondisi optimal, dan karena merupakan solusi utama dan keduanya optimal.

Sekarang asumsikan bahwa $\underline{x}_B = B^{-1} b \ngeq 0$. Menentukan indeks baris p seperti pada

$$\underline{x}_{j_p} = \{i = 1, \ldots, m\} < 0. \tag{3.2}$$

Memperkenalkan vektor

$$h = B^{-T} e_p, \tag{3.3}$$

Yang pada (3.2) diberi

$$-b^T h = -b^T B^{-T} e_p = -e_p^T (B^{-1} b) = \underline{x}_{j_p} > 0\,, \tag{3.4}$$

Menyiratkan bahwa $-h$ adalah arah menanjak, sehubungan dengan fungsi ganda g yang obyektif.

Sekarang perhatikan skema pencarian baris dibawah ini:

$$\hat{y} = \underline{y} - \beta h\,, \tag{3.5}$$

dimana β merupakan langkah dual yang harus ditentukan. Dari (3.5), (3.3) dan (3.1), ternyata

$$\underline{z}_B = c_B - B^T\hat{y} = c_B - B^T(\hat{y} - \beta h) = \beta e_p \geq 0, \tag{3.6}$$

$$\underline{z}_N = c_N - N^T\hat{y} = c_N - N^T(\hat{y} - \beta h) = \underline{z}_N + \beta N^T h. \tag{3.7}$$

Jika $\sigma_N = N^T h \ngeq 0$, kemudian dilihat dari (3.7) itu terlalu besar $\beta > 0$ akan mengarah ke $\hat{z}_N \ngeq 0$, karena melanggar kemungkinan ganda. Sangat mudah untuk menentukan kemungkinan terbesar β dan menurut indeks kolom q, subjek untuk $\hat{z}_N \geq 0$ (dilihat dari langkah 5 pada Algoritma Dual Simplex). Kemudian, turunkan j_p dari dan masukkan q ke basis. Sangat mudah untuk membuktikan $\hat{y}$ hanya dengan solusi dasar dual, yang berkorespondensi dengan hasil basisnya.

BAB 4: Program Bilangan Bulat

4.1 Pengantar

Program bilangan bulat (*integer programming*) adalah metode untuk menemukan solusi dari banyak permasalahan (dengan tujuan untuk dimaksimalkan/diminimalkan) di mana variabel keputusuan (yang dapat dikuantifikasi) harus mengasumsikan non-pecahan/nilai diskrit. Program linear bilangan bulat (*integer linear programming*) adalah masalah pemrograman linear dimana nilai-nilai variabel keputusan dibatasi oleh bilangan bulat.

Model umum Program Bilangan Bulat (PBB) adalah sebagai berikut :

$$Maksimumkan/Minimumkan$$

$$\begin{aligned} & z = f_0(x_1, \dots, x_n) = f_0(\underline{x}) \\ & kendala : g_i(\underline{x}) \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, i \ \in M \equiv (1, \dots, m) \\ & x_j \ge 0, j \in N \equiv (1, \dots, m) \\ & x_j \ sebuah\ bilang\ bulat, j \ \in I \subseteq N \end{aligned}$$

dimana satu dan hanya satu dari tiga tanda dalam kendala yang ada.

Jika $I = N$, disebut program bilangan bulat murni (*pure integer programming*).

Jika $I \subset N$, disebut program bilangan bulat campuran (*mixed integer programming*).

Bentuk umum (dengan menggunakan notasi matriks) program bilangan bulat campuran (PBBC):

$$\left.\begin{aligned} Max \quad & c'\underline{x} + d'\underline{y} \\ Kendala \quad & A_{m\times n}\underline{x} + D_{m\times n}\underline{y} \le \underline{b} \\ & \underline{x} \ge 0, \underline{y} \ge 0 \\ & dan\ \underline{x}\ bernilai\ integer \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Jika $p = 0$, disebut program linear bilangan bulat murni (*pure integer linear programming*). Program linear yang diturunkan dengan menghilangkan batasan bilangan bulat pada variabel tersebut disebut program linear relaksasi.

PL relaksasi terkait dengan (4.1):

$$\left.\begin{array}{c} Max \quad c'\underline{x} + d'\underline{y} \\ Kendala \quad A\,\underline{x} + D\,\underline{y} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

Wilayah layak yang terkait dengan PBB selalu merupakan bagian dari wilayah layak yang terkait dengan PL relaksasi. Nilai objektif optimal dari PL relaksasi dari maksimalisasi (minimalisasi) PBB memberikan batas atas (batas bawah) pada tujuan nilai asli PBB. PL relaksasi dengan demikian digunakan secara luas dalam membangun algoritma solusi untuk masalah PBB.

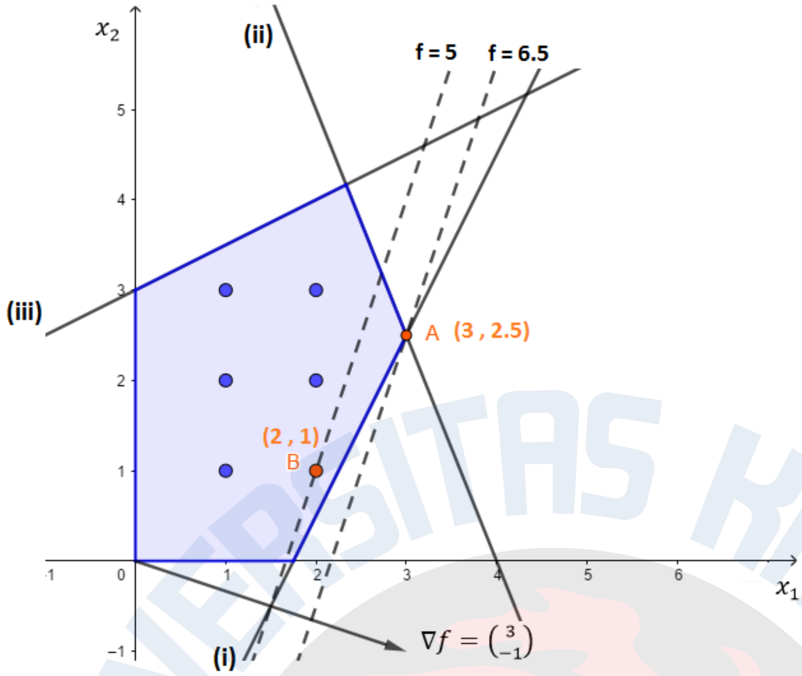
4.2 Representasi Grafis PLBB 2 Dimensi

Pertimbangkan masalah PLBB

$$\begin{array}{ll} P : Max \quad 3x_1 - x_2 = f & \\ Kendala & \\ 2x_1 - x_2 \leq 3.5 & (i) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 & (ii) \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 & (iii) \\ x_1, x_2 \geq 0 \; dan \; x_1, x_2 \; bil.bulat & \end{array}$$

Area yang diarsir pada Gambar 3.1 adalah wilayah *LP Relaxation* dari P.

Titik bilangan bulat di area yang diarsir mewakili wilayah PLBB yang layak (*non-convex*). Gradien dari fungsi tujuan $\nabla f = \binom{3}{-1}$ memberikan arahan peningkatan f. Kurva level dari fungsi tujuan normal untuk vektor ini. Solusi PL relaksasi berada pada titik ekstrim (3,2.5), sedangkan solusi bilangan bulat optimal adalah $x_1^* = 2$ dan $x_2^* = 1$ dengan $f^* = 5$. Dapat diperhatikan bahwa solusi akhir dari PL relaksasi (3,3) tidak hanya tidak layak tetapi jauh dari solusi bilangan bulat yang optimal.



Gambar 4.1: Representasi grafis dari masalah PLBB.

4.3 Pendekatan Grafis

Yang disebut "**polyhedron integer**" didefinisikan sebagai lambung cembung dari himpunan masalah *ILP* yang layak. Dapat ditunjukkan bahwa simpulnya adalah bilangan bulat. Oleh karena itu, menyelesaikan model *ILP* diringkas untuk menyelesaikan model *LP* terkait melalui polyhedron integer.

Kita mendemostrasikan dengan menyelesaikan contoh 2 dimensi berikut secara grafis :

$$\begin{aligned} &\min \quad f = -2x_1 - 5x_2, \\ &(ILP)\ \ kendala\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ &x_1 + x_2 \le 5, \qquad\qquad (4.3) \\ &x_2 \le 3 \\ &integer\ x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Seperti yang digambarkan pada gambar (10.1), daerah *LP Relaxation* yang layak adalah daerah, dikelilingi oleh polygon OABCD. Titik-titik tersebut merupakan himpunan yang layak dari (10.1), yang lambung cembungnya adalah area teduh yang diapit olehpoligon OAEFD. Jadi, yang harus dilakukan hanyalah menerapkan pendekatan grafik LP untuk masalah di atas area yang diarsir.

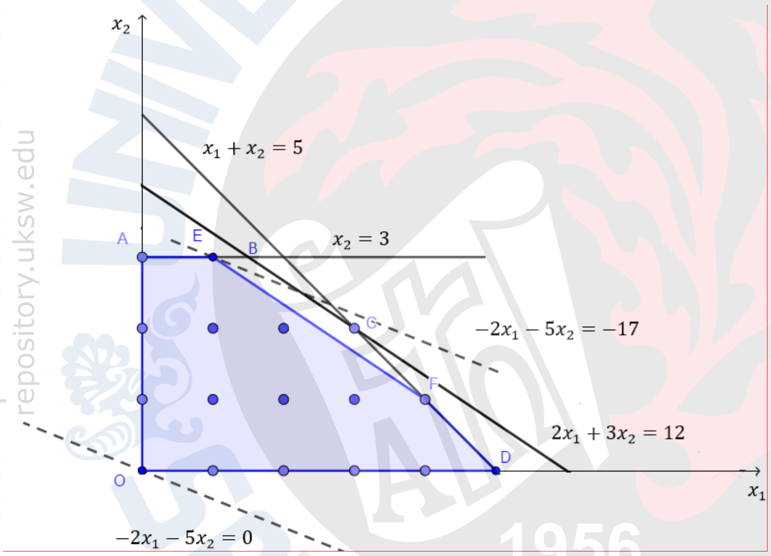
Pada gambar, garis kontur sesuai dengan $-2x_1 - 5x_2 = 0$, dari fungsi tujuan melewati titik asal. Nilai objektif berkurang dari 0 karena bergeser sejajar dengan sisi kanan atas. Terlihat bahwa posisi terjauh yang mungkin, sehubungan dengan area yang diarsir, adalah garis putus-putus yang berhubungan dengan $-2x_1 - 5x_2 = -17$, melewati simpul bilangan bulat E. dengan demikian, solusi optimal untuk masalah *ILP* (10.1) adalah $x_1^* = 1, x_2^* = 3, f^* = -17$.

Karena penentuan polyhedron integer hanya bersifat konseptual, bagaimanapun, pendekatan grafis tidak praktis untuk masalah umum ILP.

4.1 Metode Branch-and-Bound

Integer cut adalah suatu ketidaksamaan sehingga *supperplane* terkait melewati titik bilangan bulat dalam sumbu dan tegak lurus terhadap sumbu. Misalnya, $x_j \leq 1$ $atau$ $x_j \geq 6$ untuk beberapa j adalah *integer cut.* Jika *LP Relaxation* dengan daerah yang layak P memiliki solusi optimal dengan komponen pecahan $\bar{x}_j$, maka *integer cut* $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ dan $x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$ dikatakan sebagai pasangan pemotongan yang valid (terkait dengan) x_j. Menambahkan sepasang potongan seperti itu mengarah ke sepasang subprogram dengan

$$P \cap \{x | x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor\} \; dan \; P \cap \{x | x_j \leq \lceil \bar{x}_j \rceil\}$$



Gambar 4.2: Penyelesaian grafis untuk masalah PLBB (4.3))

Sebagai daerah yang layak masing-masing, tidak termasuk daerah $\lfloor \bar{x}_j \rfloor < x_j < \lceil \bar{x}_j \rceil$ sambil memasukkan semua poin bilangan bulat yang layak.$\bar{x}_j$ disebut sebagai *cutting variable.*

Metode branch-and-bound pertama kali diusulkan oleh Land and Doig (1960). Ini menambahan pasangan pemotongan yang valid berturut-turut untuk menghasilkan solusi yang layak bilangan bulat, seperti yang dijelaskan sebagai berikut :

Tentukan batas awal untuk $\hat{f} = +\infty$ pada nilai optimal , f^* dari masalah PLBB. Selesaikan PL relaksasi terkait. Jika solusinya bilangan bulat, ini optimal untukmasalah PLBB. Dalam kasus lain, tambahkan pasangan pemotonganyang valid untuk menguraikan masalah PLBB ke sepasang program PLBB (cabang) : di antara solusi akhirnya (jika ada), yang memiliki nilai kurang objektif dapat dinyatakan optimal untuk aslinya. Untuk tujuan ini, setiap subprogram PLBB diperlakukan dengan cara yang sama seperti aslinya, dan seterusnya. Melakukan seperti itu mengasilkan sejumah cabang.

Sebuah cabang dianggap *dimengerti*, yang berarti bahwa cabang tersebut tidak perlu bercabang lebih jauh karena tidak ada solusi yang lebih layak untuk masalah PLBB asli yang dapat dihasilkan, seperti dalam salah satu kasus berikut :

(i) *PL relaksasi terkait, dan karenanya subprogram PLBB itu sendiri, tidak layak.*

(ii) *Solusi untuk PL relaksasi terkait adalah bilangan bulat, dan karenanya layak untuk masalah PLBB asli. Jika nilai tujuan terkait, misalnya $\bar{f}$, benar-benar kurang dari batas atas, perbarui yang terakhir dengan $\hat{f} = \bar{f}$.*

(iii) *Ini menyatakan bahwa $\lfloor \bar{f} \rfloor \geq \hat{f}$, dimana $\bar{f}$adalah nilai optimal dari PL relaksasi terkait.*

Masalah PLBB asli diselesaikan etika semua cabang dari apa yang disebut "enumerate tree" dipahami.

Ada strategi "berorientasi luas" dan "berorientasi kedalaman" untuk mengembangkan pohon pecahan. Begitu sebuah cabang ditemukan tidak dapat dipahami, yang pertama memeriksa cabang terdekat yang tertunda (di tingkat yang sama), sedangkan yang terakhir menguraikan cabang lebih jauh ke dua cabang yang lebih dalam, dan memeriksa salah satunya sambil membiarkan yang lainnya tertunda. Kedua strategi tersebut dapat digabungkan dalam beberapa cara.

Disukai oleh banyak penulis, strategi yang berorientasi pada kedalaman selalu memeriksa salah satu cabag di tingkat yang lebih dalam, sementara membiarkan cabang lainnya menunggu, hingga mencapai satu pemahaman; kemudian, cabang yang tertunda ditangani satu per satu, dari yang terdekat (terdalam) hingga tingkat atas,hingga semua cabang diperiksa. Skema ini masih akan mengembangkan pohon enumerasi dengan jumlah cabang yang tidak dapat diterima. Nyatanya, itu bisa berkinerja buruk, atau bahkan gagal menyelesaikan beberapa masalah PLBB (yang relative kecil) dalam praktiknya. Tidak mungkin menemukan skema untuk menjamin pohon pencacahan yang cukup baik secara umum.

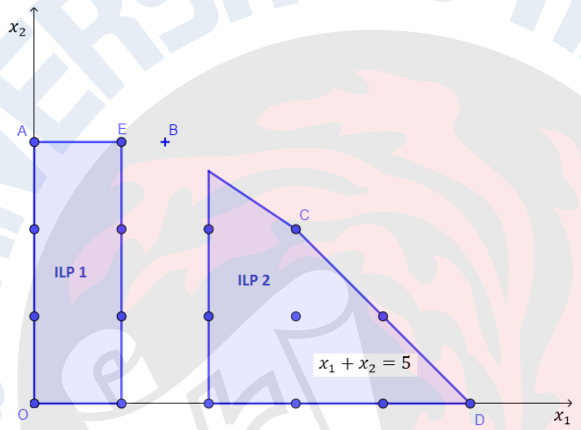
Masalah PLBB (4.3) digunakan untuk menunjukkan detail dengan metode Branch-and-Bound dengan orientasi kedalaman.

(1) *Set $\hat{f} = +\infty$. Seperti yang diketahui di Sect.2.3.1, solusi untuk PL relaksasi terkait adalah $\bar{x}_1 = 1\frac{1}{2}, \bar{x}_2 = 3, \bar{f} = -18$. Karena komponen $\bar{x}_1 = 1\frac{1}{2}$ adalah noninteger, kita tambahkan pasangan pemotongan yang valid, $x_1 \leq 1$ dan $x_1 \geq 2$ untuk menghasilkan pasangan subprogram PLBB berikut*

$$
\begin{array}{ll}
min & f = -2x_1 - 5x_2, \\
kendala & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\
(ILP1) & x_1 + \ x_2 \leq 5, \\
& x_2 \leq 3, \\
& x_1 \leq 1, \\
& integer\ x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\min & f = -2x_1 - 5x_2, \\
kendala & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\
(ILP2) & x_1 + \ \ x_2 \leq 5, \\
& x_2 \leq 3, \\
& x_1 \qquad \geq 2, \\
& integer\ x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Terlihat bahwa perpotongan himpunan yang layak dari pasangan subprogram PLBB sebelumnya kosong, sedangkan gabungannya sama dengan himpunan layak dari masalah PLBB asli. Gambar (4.3) menggambarkan dua set yang layak, dimana PLBB1 dan PLBB2 menunjukkan daerah yang layak untu PL relaksasi, terkait dengan subprogram. Tercatat bahwa solusi B untuk PL relaksasi dikeluarkan dari PLBB1 ∩ PLBB2.



Gambar 3.2: Himpunan layak untuk subprogram dua PLBB

Dengan demikian, pemecahan masalah PLBB (4.3) diringkas menjadi pemecahan subprogram (PLBB1) dan (PLBB2), secara terpisah.

(2) Selesaikan PL relaksasi yang terkait dengan (PLBB2)terlebih dahulu secara sembarang (metode simplex ganda adalah alat yang tepat-ini akan dijelaskan nanti), dan biarkan (PLBB1) tertunda. Solusi yang dihasilkan adalah $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 2\frac{2}{3}, \bar{f} = -17\frac{1}{3}$.Karena $\bar{x}_2 noninteger$, kita gunakan pasangan pemotongan yang valid $x_2 \leq 2\ dan\ x_2 \geq 3$ untuk menghasilkan dari (PLBB2) level yang lebih dalam dari dua subprogram PLBB : (PLBB3) dengan menambahkan $x_2 \leq 2$, dan (PLBB4) dengan $x_2 \geq 3$.

(3) Kemudian, secara sembarang selesaikan PL relaksasi yang terkait dengan (PLBB3) terlebih dahulu, dan biarkan (PLBB4) tertunda. Solusinya adalah $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 2, \bar{f} = -16$, yang merupakan bilangan bulat, dan karenanya optimal untuk (*ILP3*) (dan layak untuk masalah PLBB asli). Jadi, (PLBB3) sudah dipahami. Sebagai $-16 < \hat{f}, atur\ \bar{f} = -16$.

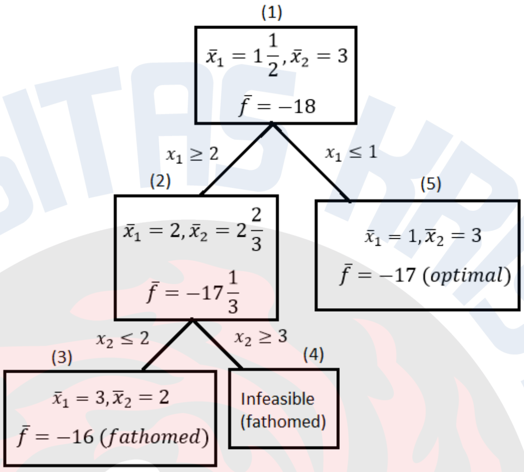
(4) Pecahkan *LPRelaxation* terkait dengan tertunda (PLBB4). Ini ditemukan tidak layak. Oleh karena itu, (PLBB4) itu sendiri tidak layak, dan karenanya dapat dipahami.

Hasil langkah 3 dan 4 menyiratkan bahwa (PLBB2) dipahami, dengan solusi optimalnya $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 2, \bar{f} = -16$.

Pecahkan PL relaksasi yang terkait dengan tertunda (PLBB1). Solusi yang diperoleh adalah $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 3, \bar{f} = -17$, yang merupakan bilangan bulat, karenanya optimal untuk (PLBB1).

Akhirnya, perbandingan antara dua solusi optimal untuk (PLBB1) dan (PLBB2) menunjukkan bahwa solusi terakhir optimal untuk masalah PLBB asli.

Gambar 4.4 memberikan pohon enumerasi, yang menunjukkan urutan PL relaksasi (1)-(5) yang ditangani dalam proses penyelesaian. Berikut ini adalah proses yang sesuai melalui kerangka simplex.



Gambar 4.4: Pohon enumerasi untuk masalah 4.3.

min $\quad f = -2x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5,$
$(PLBB)\ \ kendala\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12,$
$x_1 + x_2 + x_4 \leq 5,$ (4.4)
$\quad x_2 + x_5 \leq 3$
$integer\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

Penyelesaian dalam bentuk tablo sesuai dengan pohon enumerasi pada Gambar 4.4.
Tablo simplex awal

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
2	3	1			12
1	1		1		5
	1			1	3
-2	-5				

1. *Panggil Algortima Simplex, menghasilkan*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1		1/2		-3/2	3/2
		-1/2	1	1/2	1/2
	1			1	3
		1		2	18

2. *Sisipkan baris tersebut dengan* $-x_1 + x_6 = -2$, *ke baris terbawah ke dua*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1		1/2		-3/2		3/2
		-1/2	1	1/2		½
	1			1		3
-1					1	-2
		1		2		18

Konversikan ke tablo simplex, dan panggil Algoritma Dual Simplex, menghasilkan

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1					-1	2
		-1/3	1		1/3	1/3
	1	1/3			2/3	8/3
		-1/3		1	-2/3	1/3
		5/3			4/3	52/3

3. *Sisipkan* $x_2 + x_7 = 2$ *sebagai baris terbawah kedua*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1					-1		2
		-1/3	1		1/3		1/3
	1	1/3			2/3		8/3
		-1/3		1	-2/3		1/3
	1					1	2
		5/3			4/3		52/3

Konversikan ke tablo simplex, dan panggil Algoritma dual simplex, menghasilkan

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1		1/2				-3/2	3
		-1/2	1			1/2	
	1					1	2
				1		-1	1
		1/2			1	-3/2	1
		1				2	16

Memberikan solusi yang layak untuk masalah PLBB asli (*fathomed*). Tetapkan batas atas untuk $\bar{f} = -16$

4. *Sisipkan baris tersebut, dengan* $-x_2 + x_7 = -3$, *ke tablo akhir langkah 2 pada baris terbawah ke dua*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1					-1		2
		-1/3	1		1/3		1/3
	1	1/3			2/3		8/3
		-1/3		1	-2/3		1/3
	-1					1	-3
		5/3			4/3		52/3

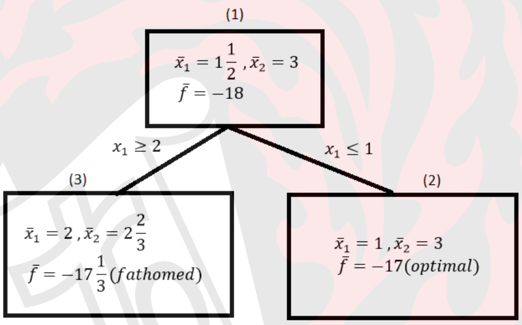
Konversikan ke tablo simplex, dan panggil Algoritma dual simplex, menghasilkan

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1					-1		2
		-1/3	1		1/3		1/3
	1	1/3			2/3		8/3
		-1/3		1	-2/3		1/3
		1/3			2/3	1	-1/3
		5/3			4/3		52/3

Menunjukkan bahwa tidak ada solusi yang layak (fathomed).

Sisipkan baris $x_1 + x_6 = 1$ ke tabel akhir langkah 1 sebagai baris terbawah kedua

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1		1/2		-3/2		3/2
		-1/2	1	1/2		1/2
	1			1		3
1					1	1
		1		2		18



Gambar 4.5: Pohon enumerasi lain untuk masalah PLBB 4.4

Konversikan menjadi tablo simplex, dan panggil algoritma dual simplex, menghasilkan

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1					1	1
			1	-1	-1	1
	1			1		3
		1		-3	-2	1
				5	2	17

Memberikan solusi yang layak untuk masalah PLBB asli. Perbandingan antara langkah ini dan langkah 3 menunjukkan bahwa ini adalah solusi optimal untuk aslinya.

Pohon enumerasi tidaklah unik. Beberapa komponen bukan bilangan bulat dari solusi saat ini menyiratkan banyak pilihan untuk variable pemotongan (atau pasangan pemotongan yang valid), dan ada dua pilihan untuk pemotongan bilangan bulat setelah variable pemotongan ditentukan. Meskipun pada prinsipnya setiappilihan memenuhi syarat, pilihan yang berbeda dapat menghasilkan efisiensi yang sangat berbeda. Misalnya, penanganan subprogram (PLBB1) terlebih dahulu, kemudian (PLBB2) mengarah ke *enumerate tree* lain dengan cabang yang lebih sedikit (lihat Gambar 10.4). Solusi $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 3, \bar{f} = -17$ ke relaksasi PL terkait dengan (PLBB1) adalah bilangan bulat, dan karenanya (PLBB1) dipahami dengan pengaturan batas atas untuk $\bar{f} = -17$. Di sisi lain, solusi relaksasi PL yang terkait dengan (PLBB2) dicapai pada

$$\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 2\frac{2}{3}, \bar{f} = -17\frac{1}{3}.$$

Sebagai $\lceil \bar{f} \rceil \geq \hat{f}$, (PLBB2) juga dipahami. Oleh karena itu, ditegaskan bahwa $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 3, \bar{f} = -17$ adalah solusi optimal untuk masalah PLBB1asli.

4.4 Metode Bidang Potong

Metode bidang potong yang disajikan pada bagian ini tidak menguraikan masalah PLBB tetapi memecahkan serangkaian masalah PL yang terkait dengan modifikasi masalah PLBB. Modifikasi dilakukan dengan menambahkan potongan yang valid secara berturut-turut sampai mencapai solusi optimal untuk masalah PLBB asli.

Jadi, ide dari metodenya cukup sederhana. Masalahnya adalah bagaimana menghasilkan pemotongan yang baik. Di bagian ini, hanya yang disebut pemotongan "pecahan" dihasilkan dari kendala.

Dimisalkan $B = \{j_i, \ldots, j_m\}$ dan $N = A \backslash B$ menjadi basis optimal dan nonbasis dari masing-masing relaksasi LP. Asumsikan bahwa solusi optimal dasar yang terkait adalah noninteger. Tanpa kehilangan keumuman, pertimbangkan persamaan yang sesuai dengan i deretan tablo simpleks optimal, yaitu,

$$x_{ji} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{i,j}\, x_j = \bar{b}_i, \tag{4.5}$$

Dimana $\bar{b}_i > 0$ bukan bilangan bulat. Perkenalkan jumlah berikut:

$$0 \leq \alpha_{i,j} = \bar{a}_{i,j} - \lfloor \bar{a}_{i,j} \rfloor, \qquad 0 \leq \beta_i = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor < 1,$$

Yang mana, (4.5) dapat ditulis

$$x_{ji} + \sum_{j \in N} \left(\lfloor \bar{a}_{i,j} \rfloor + \bar{a}_{i,j} \right) x_j = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + \beta_i > 0.$$

Mengonversi suku sebelumnya dengan memindahkan suku dengan koefisien bilangan bulat ke sisi kiri dan suku dengan pecahan ke sisi kanan memberikan

$$x_{ji} + \sum_{j \in N} \left(\lfloor \bar{a}_{i,j} \rfloor \right) x_j - \lfloor \bar{b}_i \rfloor = \beta_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{i,j}\, x_j.$$

Untuk setiap solusi bilangan bulat x, ruas kiri dari persamaan sebelumnya adalah bilangan bulat, oleh karena itu ruas kanannya juga

$$a_{i,j} \geq 0, \quad x_j \geq 0, \qquad \forall\, j \in N,$$

Ruas kanan tidak lebih dari $0 < \beta_i < 1$. Oleh karena itu, kedua sisi harus berupa bilangan bulat kurang dari dan sama dengan 0, yaitu,

$$\text{Bilangan bulat } \beta_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{i,j}\, x_j \leq 0. \tag{4.6}$$

Solusi optimal dasar yang terkait tidak memenuhi (4.6). Faktanya, jika disubstitusikan ke (4.6), ruas kiri menjadi $\beta_i > 0$ karena semua komponen tidak dasar adalah nol. Jadi, (4.6) adalah potongan yang valid, karena, sebagai tambahan, tidak mengecualikan semua solusi layak bilangan bulat.

Masalah PLBB dimodifikasi dengan menambahkan potongan tersebut, dan relaksasi PL terkait diselesaikan kemudian. Jika solusi yang dihasilkan masih bukan bilangan bulat, potongan valid baru ditentukan, dan ditambahkan ke masalah PLBB yang dimodifikasi, dan seterusnya sampai solusi yang dihasilkan adalah bilangan bulat, dan karenanya optimal untuk masalah PLBB asli, atau ketidaklayakan terdeteksi.

Contoh 4.1:

Selesaikan masalah PLBB dengan metode bidang pemotongan.

$$\min f = -6x_1 + 5x_2,$$
$$\text{s.t. } 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 20$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$\text{integer } x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4.$$

Solusi:

1. *Panggil algoritma simpleks, menghasilkan*

x1	x2	x3	x4	RHS
1	0	1/8	- 3/8	1/4
0	1	1/8	5/8	25/4
0	0	11/8	7/8	131/4

2. *Ambil baris pertama dengan sisi kanan noninteger (bebas)*

$$x1 + \frac{1}{8}x3 - \frac{3}{8}x4 = \frac{1}{4}$$

Secara ekuivalen dapat ditulis

$$x1 + \frac{1}{8}x3 + \left(-1 + \frac{5}{8}\right)x4 = \frac{1}{4}$$
$$x1 - x4 = -\frac{1}{8}x3 - \frac{5}{8}x4 + \frac{1}{4}$$

Pemotongan valid mengikuti

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8}x3 - \frac{5}{8}x4 \leq 0$$

3. *Tambahkan* $-\frac{1}{8}x3 - \frac{5}{8}x4 + x5 = -\frac{1}{4}$ *ke tablo sebelumnya sebagai baris terbawah kedua*

x1	x2	x3	x4	x5	RHS
1	0	1/8	- 3/8	0	1/4
0	1	1/8	5/8	0	25/4
0	0	- 1/8	- 5/8	1	- 1/4
0	0	1 1/8	7/8	0	131/4

4. *Algoritma dual simplex, menghasilkan*

x1	x2	x3	x4	x5	RHS
1	0	1/5	0	- 3/5	2/5
0	1	0	0	1	6
0	0	1/5	1	- 8/5	2/5
0	0	6/5	0	7/5	162/5

5. *Ambil baris ketiga dengan sisi kanan noninteger. Persamaan yang sesuai adalah*

$$\frac{1}{5}x3 + x4 - \frac{8}{5}x5 = \frac{2}{5}$$

Secara ekuivalen dapat ditulis

$$\frac{1}{5}x3 + x4 + \left(-2 + \frac{2}{5}\right)x5 = \frac{2}{5}$$

$$x4 - 2x5 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x3 - \frac{2}{5}x5$$

Pemotongan valid mengikuti

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x3 - \frac{2}{5}x5 \leq 0$$

6. *Tambahkan baris yang sesuai dengan* $-\frac{1}{5}x3 - \frac{2}{5}x5 + x6 = -\frac{2}{5}$ *ke tablo sebelumnya sebagai baris terbawah kedua*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
1	0	1/5	0	- 3/5	0	2/5
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1/5	1	-8/5	0	2/5
0	0	- 1/5	0	- 2/5	1	- 2/5
0	0	6/5	0	7/5	0	162/5

7. *Algoritma dual simplex, menghasilkan*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
1	0	1/2	0	0	-3/2	1
0	1	- 1/2	0	0	5/2	5
0	0	1	1	0	-4	2
0	0	1/2	0	1	-5/2	1
0	0	1/2	0	0	7/2	31

Yang memberikan solusi bilangan bulat dan solusi optimal untuk masalah PLBB asli adalah

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1, \bar{f} = 31$$

Jika ada beberapa sisi kanan bukan bilangan bulat dari tablo optimal untuk PL relaksasi, demikian juga ada beberapa pilihan untuk membangun potongan yang valid. Meskipun melakukannya secara sewenang-wenang, tampaknya masuk akal untuk membentuk pemotongan yang memotong paling dalam ke wilayah relaksasi PL yang layak.

Biarkan *I* menjadi himpunan indeks baris yang sesuai dengan sisi kanan bukan bilangan bulat. Untuk setiap $i \in I$,

$$\frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{j \in N} \alpha_{i,j}^2}}$$

adalah jarak Euclidean dari solusi terkait ke PL relaksasi ke batas area yang ditentukan. Sayangnya, perhitungan terkait tidak praktis. Sebagai gantinya, kita dapat menggunakan kira-kira residual, sebagai petunjuk untuk menentukan indeks baris $i\,'$ sedemikian rupa

$$i' \in \arg\ \max_{i \in I}\ \beta_i$$

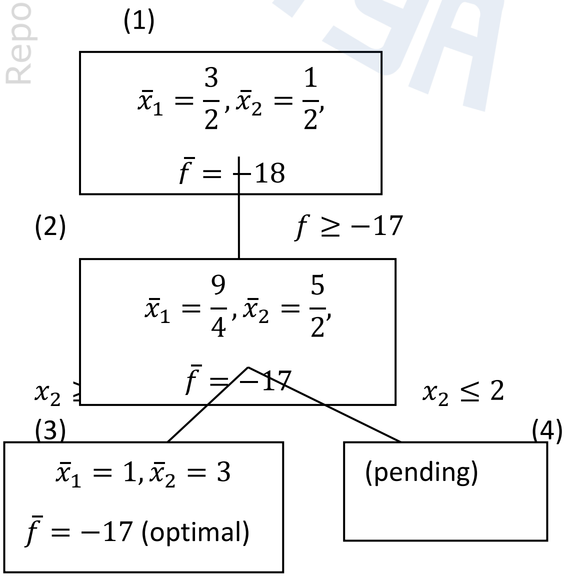
4.5 Metode Cabang Terkendali

Seperti yang telah disebutkan, perilaku metode branch-and-bound jauh dari kepuasan, meskipun kode PLBB komersial atau profesional saat ini semuanya berakar di dalamnya. Awalnya tampak tidak berhubungan dan menjanjikan, metode “aditif” yang dikemukakan oleh Balas (1965) ternyata merupakan kasus khusus dari metode branch-and-bound. Sebagai upaya untuk membuat kemajuan, metode yang dikembangkan pada bagian ini menggunakan tujuan potong $c^T x \geq f^+$ untuk mengontrol cara membludaknya pohon enumerasi**.** Ingatlah bahwa pemotongan obyektif adalah pemotongan yang valid, karena menambahkannya tidak mempengaruhi rangkaian masalah PLBB yang layak tetapi memotong solusi untuk PL relaksasi terkait.

Asumsikan bahwa relaksasi PL awal dari masalah PLBB diselesaikan, dan nilai optimal yang dicurigai f^+ ditentukan. Menambahkan potong $c^T x \geq f^+$ mengarah ke masalah PLBB yang dimodifikasi, dimana relaksasi PL memiliki himpunan optimal tidak kosong dengan nilai objektif f^+. Himpunan tersebut disebut himpunan yang valid, dan setiap titik di dalamnya adalah disebut titik yang valid. Karena solusi optimal untuk relaksasi PL awal adalah poin yang valid, maka optimal untuk masalah PLBB jika bilangan bulat.

Asumsikan sekarang bahwa itu bukan bilangan bulat. Metode ini menentukan, dan menambahkan sepasang potongan bilangan bulat yang valid untuk menguraikan relaksasi PL menjadi dua cabang. Kemudian, itu menyelesaikan salah satu dari mereka, sementara membiarkan yang lain menunggu. Jika solusi optimal yang diperoleh, jika ada, adalah titik yang valid tetapi bukan bilangan bulat, ia menambahkan pasangan pemotongan bilangan bulat lainnya untuk menguraikan cabang menjadi dua cabang yang lebih dalam, dan seterusnya, hingga memenuhi salah satu kasus berikut ini.

Gambar 4.6



(i) Solusi optimal untuk cabang ditemukan valid dan bilangan bulat, dan karenanya optimal untuk masalah ILP asli.
(ii) Cabang saat ini tidak layak, seperti yang diperkirakan.
(iii) Solusi optimal untuk cabang tidak valid, yaitu nilai obyektif yang terkait benar-benar lebih tinggi dari f^+. Kasus ini dianggap "terhenti", artinya saat ini tidak bercabang lebih jauh.

Kemudian metode menyelesaikan cabang yang tertunda satu per satu, dari yang terdekat (terdalam) ke tingkat atas, sampai semua cabang diperiksa jika kasus (i) tidak terjadi. Ini menyiratkan bahwa tidak ada titik yang valid dengan f^+. Jika semua cabang tidak layak, begitu juga masalah PLBB. Jika tidak, tentukan solusi yang terkait dengan nilai objektif terkecil di antara minimum cabang yang terhenti. Jika bilangan bulat, solusinya optimal untuk masalah PLBB asli; jika tidak, nilai optimal yang dicurigai f^+diperbarui sesuai dengan nilai obyektif, dan pemotongan obyektif baru dibentuk, dan ditambahkan ke cabang terkait, dan seterusnya, sampai solusi optimal untuk masalah PLBB asli ditemukan, atau ketidaklayakan ditemukan terdeteksi.

Adapun cara memilih variabel pemotongan dan pemotongan bilangan bulat ke cabang lebih dalam, skema kami didasarkan pada besarnya kontribusi mereka terhadap nilai optimal, misalnya, dengan memilih variabel pemotongan x_q sedemikian rupa sehingga $q \in \arg\max_{j \in J} \left| c_j \bar{x}_j \right|$, di mana J adalah kumpulan indeks yang sesuai dengan komponen bukan bilangan bulat dari solusi saat ini.

Gambar 4.6 memberikan pohon enumerasi yang terkait dengan masalah PLBB:
(1) Relaksasi LP dari masalah ILP diselesaikan.
(2) Dari tabel simpleks optimal diketahui bahwa solusi optimal gandanya tidak merosot. Menurut Corollary 25.2.1, oleh karena itu, $\bar{x}_1 = \frac{3}{2}, \bar{x}_2 = \frac{1}{2}, \bar{f} = -18$ adalah satu-satunya solusi optimal untuk relaksasi LP, yang menyiratkan bahwa $f^* \geq -17$. Atur $f^+ \geq -17$ untuk membentuk potongan objektif awal, dan tambahkan. Solusi untuk relaksasi LP yang dihasilkan adalah $\bar{x}_1 = \frac{9}{4}, \bar{x}_2 = \frac{5}{2}, \bar{f} = -17$.
(3) Karena $\left|(-2) \times \left(\frac{9}{4}\right)\right| = 4.5 < \left|(-5) \times \left(\frac{5}{2}\right)\right| = 12.5$, kita memilih x_2 sebagai variabel pemotongan, dan secara sewenang-wenang menambahkan $x_2 \geq 3$ Solusi untuk relaksasi LP yang dihasilkan adalah titik valid bilangan bulat, dan karenanya optimal untuk masalah ILP asli.
(4) Biarkan sub program terkait dengan $x_2 \leq 2$. Berikut ini menunjukkan penggunaan metode simpleks sesuai dengan pohon enumerasi pada Gambar 4.6.

Contoh 4.2:

Selesaikan masalah PLBB dengan metode cabang terkontrol.

$$\min f = -2x_1 - 5x_2,$$
(ILP) s.t. $2x_1 + 3x_2 \leq 12$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_2 \leq 3$$
Integer $x_1, x_2 \geq 0$.

Jawaban :

Sesuai dengan pohon enumerasi pada Gambar 4.7.

1. *Tabel simplex optimal PL relaksasi yang terkait yaitu,*

x1	x2	x3	x4	x5	RHS
1	0	1/2	0	-3/2	3/2
0	0	- 1/2	1	1/2	1/2
0	1	0	0	1	3
0	0	1	0	2	18

2. *Tambahkan baris yang sesuai dengan potongan tujuan 2x1 + 5x2 + x6 = 17 ke baris sebelumnya sebagai baris terbawah kedua*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
1	0	1/2	0	-3/2	0	3/2
0	0	- 1/2	1	1/2	0	1/2
0	1	0	0	1	0	3
2	5	0	0	0	1	17
0	0	1	0	2	0	18

3. *Algoritma dual simplex menghasilkan*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
1	0	5/4	0	0	- 3/4	9/4
0	0	- 3/4	1	0	1/4	1/4
0	1	- 1/2	0	0	1/2	5/2
0	0	1/2	0	1	- 1/2	1/2
0	0	0	0	0	1	17

4. *Tambahkan -x2 + x7 = -3 pada baris terbawah kedua*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	RHS
1	0	5/4	0	0	- 3/4	0	9/4
0	0	- 3/4	1	0	1/4	0	¼
0	1	- 1/2	0	0	1/2	0	5/2
0	0	1/2	0	1	- 1/2	0	½
0	-1	0	0	0	0	1	-3
0	0	0	0	0	1	0	17

5. *Algoritma dual simplex menghasilkan*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	RHS
1	0	0	0	0	1/2	-5/2	1
0	0	0	1	0	- 1/2	3/2	1
0	1	0	0	0	0	-1	3
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	-1	-2	1
0	0	0	0	0	1	0	17

Memberikan titik valid bilangan bulat dan merupakan solusi optimal :

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 3, \bar{f} = -17$$

Gambar 4.7 memberikan pohon enumerasi yang dibuat dengan metode cabang terkontrol, seperti yang dijelaskan sebagai berikut:

(1) Solusi optimal untuk PL relaksasi terkait adalah noninteger.

(2) Solusi relaksasi PL, terkait dengan modifikasi dengan menambahkan potongan obyektif $f \geq -32$ adalah valid tetapi tidak bilangan bulat.

(3) Karena $\left|(-6) \times \left(\frac{4}{7}\right)\right| < \left|(-5) \times \left(5\frac{5}{7}\right)\right|$, potong $x_2 \geq 6$ ditambahkan, menghasilkan titik yang valid tetapi bukan bilangan bulat, dengan cabang yang dihasilkan dengan menambahkan $x_2 \leq 5$ menunggu.

(4) Modifikasi lebih lanjut dengan menambahkan potongan $x_1 \geq 1$ tidak layak (dipahami).

(5) Menambahkan potongan $x_1 \leq 0$ ke subprogram PLBB di (3), menghasilkan solusi yang tidak valid (terhenti).

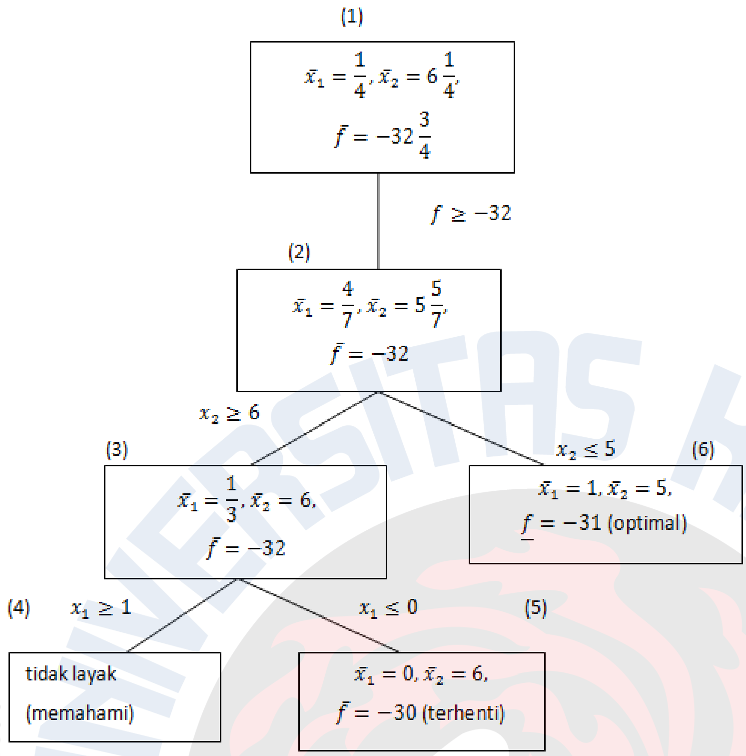
(6) Menambahkan potongan $x_2 \leq 5$ ke subprogram PLBB di (2), menghasilkan solusi yang tidak valid (terhenti).

Solusi yang dihasilkan dengan nilai obyektif terkecil di antara cabang-cabang yang terhenti adalah dari (6), yaitu,

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 5, \bar{f} = -31$$

yang merupakan bilangan bulat, dan karenanya optimal untuk masalah PLBB asli.

Gambar 4.7



Setelah variabel pemotongan ditentukan, apa yang harus dilakukan selanjutnya adalah memilih potongan bilangan bulat dari pasangan pemotongan yang valid, karena sangat penting untuk efisiensi metode.

Kriteria alternatif adalah memilih salah satu yang memotong paling dalam ke wilayah relaksasi LP yang memungkinkan. Asumsikan bahwa J adalah himpunan indeks komponen bukan bilangan bulat dari solusi terkait $\bar{x}$. Untuk sembarang $j \in J$, $\alpha_j = \bar{x}_j - \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ adalah jarak dari $\bar{x}$ ke batas $\{x | x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor\}$ yg, dan $\beta_j = \lceil \bar{x}_j \rceil$ jarak dari $\bar{x}$ ke batas $x_j = \lceil \bar{x}_j \rceil$ (lihat Bagian 2.1). Tentukan j' sedemikian rupa

$$\delta_{j'} = \max\left\{\max_{j \in J} \alpha_{j'}, \max_{j \in J} \beta_{j'}\right\}$$

Kemudian ambil $x_{j'}$ sebagai variabel pemotongan. Jika $\delta_{j'} = \alpha_{j'}$ tambahkan $x_{j'} \leq \lfloor \bar{x}_{j'} \rfloor$; jika tidak, tambahkan potongan $x_{j'} \geq \lceil \bar{x}_{j'} \rceil$.

Berdasarkan heuristik sudut paling tumpul, skema yang lebih disukai adalah memilih potongan bilangan bulat sehingga arah normalnya (menunjuk ke bagian dalam ruang setengah) membentuk sudut paling tumpul dengan gradien obyektif negatif. Lebih tepatnya, ini menentukan indeks $j' = arg\ max_{j \in J} |c_j|$, dan menambahkan $x_{j'} \leq \lfloor \bar{x}_{j'} \rfloor$ jika $c_j < 0$, dan $x_{j'} \geq \lceil \bar{x}_{j'} \rceil$ jika $c_j > 0$; jika terjadi seri, putar ke pemotongan terdalam atau modul $\bar{x}_j$ terbesar.

4.6 Metode Pemotongan Terkendali

Asumsikan bahwa solusi optimal untuk PL relaksasi dari masalah PLBB adalah bukan bilangan bulat dan nilai optimal yang dicurigai adalah f^+.

Seperti dalam metode cabang terkontrol, metode pemotongan terkontrol pertama-tama menambahkan potongan objektif $c^T x \geq f^+$, dan memecahkan PL relaksasi dari masalah PLBB yang dimodifikasi. Jika bilangan bulat, solusinya optimal untuk masalah PLBB.

Asumsikan sekarang bahwa solusinya adalah noninteger. Seperti dalam metode bidang pemotongan, potongan pecahan dibentuk dan ditambahkan, dan PL relaksasi yang dimodifikasi diselesaikan. Jika solusi optimal yang diperoleh masih bukan bilangan bulat, potongan pecahan atau obyektif ditambahkan, tergantung pada apakah solusi saat ini adalah poin yang valid atau tidak, apakah itu valid, yaitu, terkait dengan nilai obyektif yang sama dengan nilai optimal yang dicurigai f^+, potongan pecahan dibentuk dan ditambahkan; jika, jika tidak, solusinya dikaitkan dengan nilai obyektif yang lebih besar dari f^+, maka f^+ diperbarui, dan pemotongan obyektif baru ditambahkan. PL relaksasi yang dihasilkan diselesaikan, dan seterusnya, hingga solusi integer, maka solusi optimal untuk masalah PLBB asli tercapai, atau ketidaklayakan terdeteksi.

Contoh 4.3:

Selesaikan masalah PLBB berikut dengan metode pemotongan terkontrol:

min $f = -5x_1 + x_2$,

s.t. $-7x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 7$

Integer $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$.

Jawaban :

1. *Algoritma dual simplex menghasilkan*

x1	x2	x3	x4	RHS
0	37/2	1	7/2	57/2
1	5/2	0	1/2	7/2
0	27/2	0	5/2	35/2

2. *Tambahkan baris yang sesuai dengan potongan tujuan* $5x1 - x2 + x5 = 17$, *ke tablo yang sebelumnya sebagai baris bawah kedua*

x1	x2	x3	x4	x5	RHS
0	37/2	1	7/2	0	57/2
1	5/2	0	1/2	0	7/2
5	-1	0	0	1	17
0	27/2	0	5/2	0	35/2

Setelah mengubah menjadi tablo simplex, algoritma dual simplex menghasilkan

x1	x2	x3	x4	x5	RHS
0	0	1	2/27	37/27	751/27

1	0	0	1/27	5/27	92/27
0	1	0	5/27	- 2/27	1/27
0	0	0	0	1	17

3. *Tambahkan baris yang terkait dengan potongan pecahan* $-\frac{2}{27}x4 - \frac{10}{27}x5 + x6 = -\frac{22}{27}$, *sebagai baris bawah kedua*

x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
0	0	1	2/27	37/27	0	751/27
1	0	0	1/27	5/27	0	92/27
0	1	0	5/27	- 2/27	0	1/27
0	0	0	- 2/27	- 10/27	1	- 22/27
0	0	0	0	1	0	17

Algoritma dual simplex menghasilkan

x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
0	1	1	0	0	7/2	25
1	0	0	0	0	1/2	3
0	-1	0	0	1	-5/2	2
0	5	0	1	0	-1	1
0	1	0	0	0	5/2	15

Memberikan solusi bilangan bulat, yang merupakan solusi optimal untuk masalah ILP asli yaitu,

$$\bar{x}_1 = (3, 0{,}25, 1)^T \ , f^* = -15$$

BAB 5: Aplikasi

5.1 Masalah Produksi

Contoh 5.1:

Sebuah pabrik memproduksi furnitur A, B, C. Masing-masing produksi furnitur melalui tiga prosedur: pemrosesan komponen, pelapisan listrik, dan perakitan. Kapasitas produksi setiap prosedur per hari adalah diubah menjadi jam kerja efektif. Di bawah ini adalah pekerjaan efektif yang dibutuhkan (jam) dan keuntungan yang bisa didapat untuk setiap perabot.

Procedure	Hours per piece			Available hours per day
	Product A	Product B	Product C	
Pemrosesan komponen	0,025	0,04	0,3	400
Pelapisan Listrik	0,2	0,05	0,1	900
Perakitan	0,04	0,02	0,2	600
Profit(dollars/piece)	1,25	1,5	2,25	

Bagaimana pabrik mencapai keuntungan tertinggi?

5.2 Masalah Pengaturan SDM

Contoh 5.2:

Supermarket sepanjang waktu mengatur tanggapan penjualan. Setiap hari dibagi menjadi enam interval waktu, masing-masing 4 jam. Setiap salesrespon memulai bekerja pada awal interval, kemudian terus bekerja selama 8 jam. Jumlah salesrespon yang dibutuhkan untuk setiap interval adalah sebagai berikut :

Interval	1	2	3	4	5	6
	2-6 o'clock	6-10 o'clock	10-14 o'clock	14-18 o'clock	18-22 o'clock	22-2 o'clock
Number	7	15	25	20	30	7

Misalkan x_j, dengan $j = 1, \dots, 6$, adalah jumlah asisten yang mulai bekerja pada awal interval j dan f adalah jumlah total salesrespon. Intinya adalah menentukan nilai variable untuk mencapai jumlah minimum salesrespons yang bekerja per hari.

Hasil optimumnya adalah = $x_2 = 25, x_4 = 30, x_6 = 7, x_1 = x_3 = x_5 = 0$

5.3 Masalah Transportasi

5.3.1 Pengertian

Transportasi berarti transfer material dari berbagai tempat sumber ke tujuan yang berbeda. Misalkan suatu perusahaan memiliki unit produksi pada $O_1, O_2, \ldots, O_m$ tempat. Permintaan untuk diproduksi barang di n pusat yang berbeda $D_1, D_2 \ldots, D_n$. Perusahaan harus mengangkut barang dari m unit produksi yang berbeda ke n pusat permintaan yang berbeda dengan biaya minimum. Pertimbangkan biaya pengiriman dari unit produksi O_i ke pusat permintaan D_j adalah c_{ij}, dan unit x_{ij} dikirim dari O_i ke D_j, maka biayanya adalah $c_{ij}x_{ij}$. Oleh karena itu, total biaya pengiriman adalah

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{5.1}$$

Perhatikan bahwa z adalah linier. Dari (5.1) matriks $(C_{IJ})_{m\times n}$ disebut "matriks biaya unit". Barang ditransfer dari sumber i ke pusat permintaan j. Kita ingin menemukan xij ≥ 0 yang memenuhi

kendala $m + n$.

Lalu, kita punya

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = a \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = b \tag{5.3}$$

Dimana a dan b adalah total penawaran dan permintaan. Masalah transportasi adalah mencari x_{ij} sehingga biaya transportasi menjadi minimum. Jika jumlah barang yang tersedia di sumber ke i dipindahkan ke tujuan j, maka

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \tag{5.5}$$

Menggunakan (5.1) dan (5.4) – (5.5), masalah transportasi bisa dirumuskan sebagai masalah pemrograman linier:

meminimalkan:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

mendala:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1,2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1,2, \ldots n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

setara dengan

meminimalkan

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

kendala

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1,$$
$$x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2,$$
$$x_{31} + x_{32} + \cdots + x_{3n} = a_3,$$

.

.

.

$$x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m,$$
$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2,$$
$$x_{13} + x_{23} + \cdots + x_{m3} = b_3,$$

.

.

.

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n,$$
$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, n$$

Dengan kata lain,

meminimalkan:

$$C^T x$$

kendala:

$$Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

dimana

$$C^T = [c_{11} \quad c_{12} \ \ldots \ c_{mn}],$$
$$x^T = [X_{11} \quad X_{12} \ \ldots \ x_{1n} \ x_{21} \ \ldots \ x_{2n} \ \ldots \ x_{mn}],$$
$$b^T = [a_1 \quad a_2 \ \ldots \ a_m \ b_1 \, b_2 \ldots b_n]$$
$$A = [a_{11} \quad a_{12} \ \ldots \ a_{mn}],$$
$$a_{11}^T = [1 \quad 0 \ \ldots \ 0 \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0],$$
$$a_{mn} = [0 \ldots 1 \ 0 \ \ldots \ 1]$$

5.3.2 Masalah Transportasi Seimbang

Jika jumlah total yang dibutuhkan di tempat tujuan tepat sama dengan jumlah yang tersedia di asalnya, maka masalahnya adalah dikatakan sebagai masalah transportasi yang seimbang.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Masalah transportasi adalah jenis khusus dari masalah program linier. Dengan demikian, definisi solusi layak dasar dari masalah transportasi sama dengan definisi linier masalah pemrograman.

Jika jumlah total yang dibutuhkan di tempat tujuan tidak sama dengan jumlah yang tersedia di asalnya, maka masalahnya adalah dikatakan sebagai masalah transportasi yang tidak seimbang.

Masalah transportasi yang tidak seimbang dibuat menjadi masalah transportasi seimbang.
Jika

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Maka kemudian kita bisa membuat pusat permintaan tambahan, yang disebut *fictitious* atau pusat permintaan tiruan (*dummy*), memiliki permintaan tambahan $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ dan biaya transportasi permintaan ini dari unit sumber adalah nol.

Jika

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Maka kemudian kami mempertimbangkan pusat sumber fiktif dengan barang $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ di asal fiktif dan transportasi $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ dari asal fiktif akan diambil sebagai persediaan pendek.

Sesuai dengan namanya, metode barat laut mengisi tabel awal transportasi dari sisi barat laut (kiri atas) dengan kuantitas sebanyak-banyaknya. Pengisian dilakukan terus-menerus hingga semua sumber dihabiskan.

1. *Alokasikan $min\{a_i , b_j\}$ ke sudut barat laut biaya pokok, dimana a_i adalah pasokan yang tersedia di sumber ke i dan b_j adalah permintaan di tujuan ke j*
2. *Baris atau kolom yang terpenuhi diabaikan untuk pertimbangan lebih lanjut. Sesuaikan penawaran dan permintaan dengan mengurangi jumlah yang dialokasikan.*
3. *Lakukan operasi berikut :*
   a) *Jika persediaan untuk baris pertama terpenuhi, kemudian pindah ke bawah di kolom pertama dan lanjutkan ke langkah 1*
   b) *Jika permintaan untuk kolom pertama terpenuhi maka pindah secara horizontal ke sel berikutnya di baris yang sama dan lanjutkan ke langkah 1*
4. *Jika baris dan kolom cenderung nol secara bersamaan, abaikan baris dan kolom terkait dengan sel yang dialokasikan*
5. *Ulangi langkah 3 sampai 4 sampai semua alokasi dibuat, yaitu sampai penawaran memenuhi permintaan.*

5.3.3 Metode North West Corner

Salah satu jenis/modul LPP yang digunakan untuk mengatur transportasi/distribusi barang dari sejumlah sumber menuju sejumlah tujuan/distribusi yang dibatasi oleh supply dari sumber dan demand dari tujuan/destinasi.

Contoh 5.3:

Temukan solusi dasar awal yang layak dari masalah transportasi berikut ini.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	5	2	4	3	30
O_2	6	4	9	5	40
O_3	2	3	8	1	55
	15	20	40	50	

Supply : $a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 55$
Demand : $b_1 = 15, b_2 = 20, b_3 = 40, b_4 = 50$
Matrix Cost : $c_{11} = 5, c_{12} = 2, c_{13} = 4, c_{14} = 3, c_{21} = 6, c_{22} = 4, c_{23} = 9, c_{24} = 5, c_{31} = 2,$

$$c_{32} = 3, c_{33} = 8, c_{34} = 1$$

Contoh 5.4:

Pecahkan masalah transportasi berikut menggunakan metode sudut barat laut.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	19	30	50	10	7
O_2	70	30	40	60	9
O_3	40	8	70	20	18

5	8	7	14

Supply : $a_1 = 7, a_2 = 9, a_3 = 18$
Demand : $b_1 = 5, b_2 = 8, b_3 = 7, b_4 = 14$
Matrix Cost : $c_{11} = 19, c_{12} = 30, c_{13} = 50, c_{14} = 10, c_{21} = 70, c_{22} = 30, c_{23} = 40, c_{24} = 60, c_{31} = 40,$

$$c_{32} = 8, c_{33} = 70, c_{34} = 20$$

5.3.4 Metode Least Cost Method

Metode ini biasanya memberikan solusi dasar awal yang lebih baik daripada metode northwest corner karena metode ini mempertimbangkan variable biaya dalam masalah.

Algoritma :

1. *Alokasikan* $min\{a_j, b_j\}$ *ke sel yang memiliki biaya terendah dalam matriks transportasi. Jika ada yang seri, maka pilih salah satunya*
2. *Abaikan baris atau kolom yang terpenuhi. Jika baris dan kolom keduanya terpenuhi, abaikan salah satunya*
3. *Sesuaikan* a_j *dan* b_j *untuk baris dan kolom yang tidak diabaikan*

Ulangi langkah 1 - 3 sampai semua unit teralokasikan

Tentukan solusi dasar awal yang layak dari masalah transportasi seimbang berikut dengan metode LCM

Contoh 5.5:

Tentukan solusi dasar awal yang layak dari masalah transportasi seimbang berikut dengan metode LCM

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
	6	10	15	4	

Supply : $a_1 = 14, a_2 = 16, a_3 = 5$
Demand : $b_1 = 6, b_2 = 10, b_3 = 15, b_4 = 4$
Transportation cost = $1 \times 14 + 8 \times 6 + 9 \times 92 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 4 = 156$ unit

Contoh 5.6:

Tentukan solusi dasar awal yang layak dari masalah transportasi seimbang berikut dengan metode LCM

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	5	4	3	2	5
O_2	10	8	4	7	5
O_3	9	9	8	4	5
	1	6	2	6	

Supply : $a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 5$
Demand : $b_1 = 1, b_2 = 6, b_3 = 2, b_4 = 6$
Minimum transporation cost = $5 \times 2 + 3 \times 8 + 2 \times 4 + 1 \times 9 + 3 \times 9 + 1 \times 4 = 82$ unit

5.3.4 Metode Vogel

Metode ini lebih disukai dari metode yang lain karena menghasilkan biaya minimalisasi terbaik dan mendekati solusi optimal. Oleh karena itu jika kita menggunakan solusi kelayakan dasar awal yang diperoleh dengan metode pendekata vogel dan dilanjut untuk menyelesaikan solusi optimal, maka waktu yang dibutuhkan untuk mencapai solusi optimal lebih sedikit. Yang mengembangkan metode ini adalah W.R. Vogel.

Algoritma :

1. *Ambil baris pertama lalu pilih biaya terkecilnya dan kurangi dengan biaya tertinggi berikutnya lalu tulis hasilnya didepan baris sebelah kanan. Ini adalah penalty untuk baris pertama. Dengan cara ini hitung penalty masing-masing baris. Demikian pula hitung penalty kolom dan tulis hasilnya dibawah kolom yang sesuai.*
2. *Pilih penalty tertinggi dan amati baris atau kolomnya yang sesuai. Dan kemudian buat alokasi* $min\{a_j,\ b_j\}$ *ke sel yang memiliki biaya terendah di baris atau kolom yang dipilih.*
3. *Abaikan baris atau kolom yang terpenuhi. Hitung penalty baru untuk sub-matriks yang tersisa seperti di langkah 1, dan untuk alokasi ikuti petunjuk langkah 2. Lanjutkan sampai semua baris dan kolom terpenuhi.*

   Aturan untuk seri :

   Dalam kasus seri untuk penalty terbesar, pilih sel biaya terendah disemua baris dan kolom terikat untuk alokasinya. Sekali lagi, jika ada yang seri untuk biaya terendah pilih satu untuk alokasi yang memberikan a_j, b_j minimum.

Contoh 5.7:

Pertimbangkan masalah transportasi berikut.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	5	4	3	2	5
O_2	10	8	4	7	5
O_3	9	9	8	4	5
	1	6	2	6	

Contoh 5.8:

Hitung solusi dasar awal yang layak untuk masalah transportasi ini dengan metode pendekatan Vogel.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	2	2	1	5	300
O_2	8	2	6	5	300
O_3	6	1	4	2	200
	200	200	300	100	

Daftar Pustaka

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. D. (2010). *Linear Programming and Network Flows, Fourth Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Darst, R. B. (2009). *Introduction to Linear Programming*. New York: CRC Press.

Hu, T. C., and Kahng, A. B. (2016). *Linear and Integre Programming Made Easy*. Cham: Springer.

Khan, S., Bari, A., and Khan, M. F. (2019). *Linear and Integer Programming*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing.

Mishra, S. K., and Ram, B. (2018). *Introduction to Linear Programming with MATLAB*. Boca Raton: CRC Press.

Pan, P.-Q. (2014). *Linear Programming Computation*. New York: Springer Berlin Heidelberg.

Paris, Q. (2016). *An Economic Interpretation Linear Programming*. Hampshire: Palgrave Macmillan.

Thie, P. R., and Keough, G. E. (2008). *An Introduction to Linear Programming and Game Theory, Third Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Vanderbei, R. J. (2020). *Linear Programming: Foundations and Extensions, Fifth Edition*. Cham: Springer.