GERAK BROWN GEOMETRIK, SUATU TINJAUAN ULANG

Bambang Susanto
Progdi Matematika FSM Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga

bambang.susanto@staff.uksw.edu

PENDAHULUAN

Terinspirasi dari hasil penelitian ahli botani Robert Brown (1826) dan pengembangan teoritis yang dilakukan oleh matematikawan Norbert Weiner, (1920), Louis Bachilier (1990) dalam disertasinya berjudul *Theori de la Speculation* mengaplikasikan teori Gerak Brown untuk memodelkan *stock prices return*. Gerak Brown adalah suatu proses stokastik sederhana yang telah menjadi dasar untuk pengembangan proses stokastik yang lebih rumit, seperti proses Levy atau proses difusi. Penelitian tentang pergerakan harga saham terus dilakukan seiring dengan perkembangan model stokastik yang diasumsikan([5]). Salah satu model stokastik sederhana yang sering digunakan adalah modifikasi dari gerak Brown yang biasa disebut gerak Brown geometrik(GBG). Para ahli ekonomi mencoba menggunakan GBG sebagai model pergerakan harga saham karena selalu bernilai positif dan laju perubahan relatifnya berupa kombinasi dari pertumbuhan deterministik serupa laju pertumbuhan suku bunga ditambah dengan perubahan acak yang berdistribusi normal. Lihat [4] untuk penjelasan lebih lengkap. Dalam makalah ini akan ditinjau ulang konsep gerak Brown yang dikembangkan oleh matematikawan Wiener. Pembahasan dilengkapi dengan sifat sifat dari GBG yang menunjukkan mengapa konsep ini dapat digunakan untk memodelkan harga saham.

DEFINISI DAN SIFAT

Untuk selanjutnya akan digunakan notasi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ untuk menyatakan peubah acak X berdistrdibusi normal dengan mean $E(X)=\mu$ dan variansi $\mathrm{var}(X)=\sigma^2$. Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka peubah acak non negatif $Y=e^X$ biasa dikatakan berdistribusi lognormal dengan parameter μ dan σ^2 dan dinotasikan dengan $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Disebut demikian karena $\ln Y = X$ berdistribusi normal. Dapat ditunjukkan peubah acak Y memiliki mean $E(Y)=e^{\mu+\sigma^2/2}$ dan $\mathrm{var}(Y)=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$.

Sebelum diberikan definisi gerak Brown, akan disajikan dahulu proposisi yang menunjukkan sifat istimewa dari distribusi normal yang sering digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Proposisi 1 Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dan a, b konstan maka peubah acak a $aX+b \sim$

$N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

Definisi. Proses stokastik $\{X_t,\ t\geq 0\}$ disebut suatu gerak Brown baku jika ke-empat sifat berikut dipenuhi :

1. Proses mulai dari 0 : artinya Pr($X_0=0$) = 1

2. Proses tersebut memiliki lintasan kontinu artinya dgn probabilitas 1, fungsi $t \mapsto X_t$ kontinu

3. Peubah acak X_t berdistribusi $N(0,\ t)$

4. Proses tersebut memiliki kenaikan bebas yang berdistribusi normal: Jika $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$ maka $X_{t_1},\ X_{t_2-t_1},\ \cdots,\ X_{t_n-t_{n-1}}$ saling bebas dan $X_{t_i-t_{i-1}}\sim$ $N(0,\ t_i-t_{i-1})$, untuk setiap $1\leq i\leq n$

Definisi alternatif untuk mendeskripsikan karakteristik dari gerak Brown termasuk bukti eksistensinya dapat dilihat [1] dan [3] . Contoh berikut menunjukkan beberapa variasi dari gerak Brown yang diperoleh dengan cara melakukan *scaling, shifting* dan *inversion*. Lihat [1]dan [3] untuk informasi lebih lanjut tentang hal ini.

Contoh 1. Misalkan $\{B_t,\ t\geq 0\}$ suatu gerak Brown baku. Dengan menggunakan proposisi 1 diatas dapat ditunjukkan bahwa ketiga proses stokastik berikut juga suatu gerak Brown baku

a.Untuk setiap $s>0$, $\{s^{-0,5}B_{st},\ t\geq 0\}$ adalah suatu gerak Brown baku

b.Untuk setiap $s>0$, $\{B_{s+t},\ t\geq 0\}$ adalah suatu gerak Brown baku yang saling bebas dengan $\{B_u,\ 0\leq u<s\}$

c.Proses stokastik $\{X_t,\ t\geq 0\}$ yang dimulai dari nol dan $X_t = t\,B_{\frac{1}{t}}$ untuk $t>0$ adalah juga suatu gerak Brown baku,

Proposisi 2. Misalkan $\{B_t,\ t\geq 0\}$ suatu gerak Brown baku. Misalkan pula $0\leq u\leq s$ dan $t\geq 0$ dan $K>0$. Maka berlakulah :

(i) $E(B_t)=0$ dan

$E(B_sB_u)=\min(s,u)$.

(ii) $E[(B_{t+s}-B_s)B_u]=0$

(iii) $X_n=\dfrac{B_{t+\frac{1}{n}}-B_t}{\frac{1}{n}} \Rightarrow \Pr(|X_n|>\mathrm{K})\to 1$

jika $\mathrm{n}\to+\infty$

(iv) $\operatorname{var}(aB_u+bB_s)=(a+b)^2u+b^2(s-u)$

Bukti :

Sifat (i) yang menyatakan bahwa kovariansi $\operatorname{Cov}(B_s,B_u)=\min(s,u)$ adalah akibat langsung dari fakta bahwa B_s dan B_u-B_s adalah dua peubah acak saling bebas dengan mean 0 sehingga

$$\operatorname{Cov}(B_s,B_u)=\operatorname{Cov}(B_s,B_s)+\operatorname{Cov}(B_s,B_u-B_s)$$

$$=\operatorname{Var}(B_s)\ +\ 0\ =\ \mathrm{s}$$

Dari sifat(i) diperoleh :

$$E[(B_{t+s}-B_s)B_u]=\operatorname{Cov}(B_{t+s},B_u)-\operatorname{Cov}(B_s,B_u)$$

$$=\min(t+s,u)-\min(s,u)=0$$

Jadi terbukti sifat (ii) yang biasa disebut sifat Markov dari gerak Brown yang menyatakan bahwa proses stokastik $\{B_{t+s}-B_s,\ t\geq 0\}$ saling bebas dengan $\{B_u,\ 0\leq u\leq s\}$ untuk $s>0$ tetap

Sifat(iii) menyatakan bahwa dengan probabilitas satu, laju perubahan dari gerak Brown pada saat t akan bernilai tak hingga. Ini berarti bahwa hampir pasti gerak Brown tak dapat diturunkan dimana mana. Sifat ini adalah akibat langsung dari fakta bahwa $X_n=\sqrt{n}\ Z$ dengan $Z\sim N(0,1)$

sehingga

$$\Pr(|X_n| > K) = \Pr(|Z| > \frac{K}{\sqrt{n}}) \to \Pr(|Z| > 0) = 1$$

Akhirnya,

karena B_s dan $B_u - B_s$ saling bebas maka

$$\mathrm{var}(aB_u + bB_s) = \mathrm{var}[(a+b)B_u] + \mathrm{var}[b(B_s - B_u)]$$

Ini berarti $aB_u + bB_s$ berdistribusi normal dengan variansi $(a+b)^2 u + b^2(s-u)$.

Terbukti sifat(iv).

Model GBG telah banyak digunakan untuk mendeskripsikan perilaku acak dari harga aset. Menurut Luenberger[4], model GBG dipakai untuk menurunkan rumus Black-Scholes dalam penentuan harga opsi Eropa. Berikut definisi formalnya.

Definisi. Misalkan $\{B_t\,,\, t \geq 0\}$ suatu gerak Brown baku. Misalkan pula $X_t = \sigma B_t + \delta t$ maka proses stokastik $\{X_t\,,\, t \geq 0\}$ biasa disebut gerak Brown dengan koefisien difusi σ^2 dan drift δ.

Definisi. Misalkan $\{X_t\,,\, t \geq 0\}$ adalah suatu gerak Brown dengan koefisien difusi σ^2 dan drift δ. Gerak Brown Geometrik mulai dengan $S_0 > 0$ tak lain adalah proses stokastik $\{S_t\,,\, t \geq 0\}$ dengan $S_t = S_0\, e^{X_t}$

Perhatikan bahwa pada saat t, gerak Brown geometrik S_t berdistribusi lognormal sebab

$$\ln S_t \sim N(\delta t + \ln S_0,\, \sigma^2 t)$$

Selanjutnya akan disajikan sifat sifat gerak dari GBG. Sifat sifat tersebut dituangkan dalam bentuk proposisi berikut

Proposisi 3. Misalkan $\{S_t\,,\, t \geq 0\}$ suatu gerak Brown geoetrik. Misalkan pula $X_t = \ln(S_t / S_0)$ Maka berlakulah :

(i) $X_t \sim N(\delta t,\, \sigma^2 t)$

(ii) $E[S_t] = e^{\bar{r}\, t}\, S_0$ dengan $\bar{r} = \delta + \sigma^2/2$

(iii) $S_{t+h} / S_t = e^{\delta h + \sigma(B_{t+h} - B_t)}$

(iv) $E[S_t / S_u] = e^{\bar{r}(t-u)}$

(v) $E[S_t | S_u = s_u] = e^{\bar{r}(t-u)}\, s_u$

(vi) $\mathrm{var}[S_t] = S_0^2 \exp(2\bar{r}t)[\exp(\sigma^2 t\text{-}1)]$

Bukti

Gunakan proposisi 1 untuk $X_t = \sigma B_t + \delta t$ maka akan diperoleh (i)

(ii) dan (vi) adalah akibat langsung dari fakta

$$S_t \sim LN(\delta t + \ln S_0,\, \sigma^2 t)$$

(iii) adalah akibat langsung dari definisi GBG

karena $S_{t+h} = S_t\, e^{X_{t+h} - X_t}$

(iv) adalah akibat langsung dari definisi GBG

(v) adalah akibat langsung dari (iv), sebab

$$E[S_t | S_u = s_u] = s_u\, E[S_t / S_u | S_u = s_u]$$

KESIMPULAN

Berdasarkan sifat sifat GBG yang dikaji dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1.Karena GBG memiliki lintasan yang kontinu maka GBG tepat untuk memodelkan pergerakan harga saham tanpa lompatan (*jump*).

2. Fakta bahwa GBG tak dapat diturunkan di mana mana (proposisi 2(iii)) mengindikasikan bahwa pergerakan harga saham mendatang tak dapat diprediksi.

3. Sifat GBG (ii) dan (v) dalam proposisi 3 menunjukkan bahwa menunjukkan bahwa parameter $\bar{r}$ dapat diinterpretasika sebagai ekspektasi laju pertumbuhan harga saham dalam model

deterministik biasa.

4. Sifat GBG(iii) digunakan untuk melakukan simulasi dari lintasan gerak Brown geometrik. Untuk implementasinya dengan menggunakan *software* R, lihat [2].

DAFTAR PUSTAKA

[1] Freedman, D. 1983. *Brownian motions and diffusion*, Springer.

[2] Iacus, S.M, 2008. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*, Springer.

[3] Mikosch, T. 1999. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific.

[4] Luenberger, D.G. 1998. *Investment Science*, Oxford Univ. Press

[5] Neisy, A and Peymany, M. 2011. Financial Modeling by Ordinary and Stochastic Differential Equations. *World Applied Science Journal*, Vol. 13, No. 11, pp 2288-2295