TURUNAN TINGKAT TAK BULAT

Bambang Susanto
Progdi Matematika FSM Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga

bambang.susanto@staff.uksw.edu

PENDAHULUAN

Turunan tak bulat (*Fractional calculus*) adalah perampatan dari turunan dan integral dengan tingkat tidak harus bulat. Ide ini berawal dari korespondensi matematikawan L'Hospital kepada rekannya Liebnitz pada tahun 1695. Sejak itu para ahli terus mengembangkan konsep tersebut. Berikut beberapa matematikawan terkemuka yang berkontribusi dalam pengembangan kosep tersebut Leibnitz(1695), Euler(1730), Lagrange(1772), Laplace(1812), Fourier(1822), Abel(1823), Liouville(1832) dan Riemann(1876). Informasi lebih lengkap dapat dilihat di [5]. Berbeda dengan turunan dan integral tingkat bulat memiliki interpretasi fisis dan geometrik yang jelas , tidak demikian dengan turunan tak bulat. Walaupun demikian para ilmuwan telah mengapliksikannya tidak hanya di bidang sains tetapi juga di rekayasa dan statistik. Lihat [1], [2] dan [4]. Dalam makalah ini akan ditinjau ulang definisi turunan tak bulat yang dikembangkan oleh Riemann Louville. Pembahasan dilengkapi dengan contoh contoh sederhana untuk menunjukkan mengapa konsep ini tidak diajarkan di universitas tingkat pertama.

DEFINISI DAN CONTOH

Bagaimanakah definisi turunan tak bulat ? Sebelum diberikan definisi formalnya, berikut akan ditinjau terlebih dahulu notasi untuk turuan tingkat bulat. Turunan berulang n kali biasanya dinotasikan dengan

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx} f(x)\right)\right)$$

Dengan cara serupa, integral berulang n kali biasa disajikan dengan notasi berikut

$$\frac{d^{-n} f(x)}{dx^{-n}} = \int_0^x \left(\int_0^{x_{n-1}} \cdots \left(\int_0^{x_2} \left(\int_0^{x_1} f(t)dt\right)dx_1\right)\cdots\right)dx_{n-1}$$

Dengan demikian integral berulang n kali dipikirkan sebagai turunan tingkat bulat negatif.

Contoh 1 $f(x)=\sqrt{x}$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$$

sedangkan

$$\frac{d^{-2} f(x)}{dx^{-2}}=\int_0^x \left(\int_0^{x_1} \sqrt{t}\, dt \right) dx_1 = \int_0^x \frac{2x_1^{3/2}}{3}\, dx_1 = \frac{4x^{5/2}}{15}$$

Selanjutnya perhatikan integral berulang dua kali berikut

$$\int_{x_1=0}^{x} \int_{t=0}^{x_1} f(t)\; dt\, dx_1 = \int_{t=0}^{x} \int_{x_1=t}^{x} f(t)\, dx_1\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{x} (x-t)\, f(t)\, dt$$

Dengan induksi, integral lipat n juga dapat disajikan dengan integral tunggal berikut

$$\int_0^x \left(\int_0^{x_{n-1}} \cdots \left(\int_0^{x_2} \left(\int_0^{x_1} f(t)dt\right) dx_1 \right) \cdots \right) dx_{n-1} = \frac{\int_0^x (x-t)^{n-1} dt}{(n-1)!}$$

Contoh 2.

$$\frac{d^{-2}\sqrt{x}}{dx^{-2}} = \int_0^x (x-t)\sqrt{t}\, dt = \frac{4x^{5/2}}{15}$$

Untuk merampatkan konsep turunan bulat diatas menjadi turunan tak bulat digunakan fungsi Gamma. Fungsi Gamma diperkenalkan oleh matematikawan Euler dalam abad ke-18 untuk merampatkan konsep faktorial. Definisi fungsi Gamma adalah sebagai berikut $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ Perhatikan bahwa karena $\Gamma(z)=(z-1)\,\Gamma(z-1)$ dan $\Gamma(1)=1$ maka $\Gamma(z)=(z-1)!$ jika z asli.

Definisi turunan tingkat tak bulat

Definisi untuk turunan tak bulat negatif yang dikemukakan oleh matematikawan Riemann-Liouville dirumuskan sebagai berikut

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, f(t)\, dt,\;\; \alpha > 0$$

Contoh 3

$$\frac{d^{-0,5}\sqrt{x}}{dx^{0,5}} = \frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \int_0^x (x-t)^{-0,5} \sqrt{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{t\, dt}{\sqrt{xt-t^2}} = \frac{x\sqrt{\pi}}{2}$$

Adapun definisi untuk turunan tak bulat positif yang diciptakan oleh Riemann adalah sebagai berikut. Misalkan $\alpha > 0$ dan n adalah bilangan asli terkecil yang melebihi α

$$\frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{-(n-\alpha)}\, f(x)}{dx^{-(n-\alpha)}} \right)$$

Contoh 4

$$\frac{d^{0,5}\sqrt{x}}{dx^{0,5}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(0{,}5)} \int_0^x (x-t)^{-0,5} \sqrt{t}\, dt \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Contoh 5.

Perhatikan fungsi $f(x)=x^a$ dengan $a>-1$

$$\frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\, t^a dt \right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-\alpha+a} \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha-1}\, t^a dt \right)$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)\;\; x^{a-\alpha}}{\Gamma(a-\alpha+1)}$$

Contoh 6. (Interpretasi geometris)

Dari definisi turunan tak bulat diatas dapat disimpulkan bahwa turunan tingkat 0,5 dari suatu fungsi f(x) di suatu titik adalah sama dengan kemiringan dari fungsi $F(x)=\frac{d^{0,5} f(x)}{dx^{0,5}}$ di titik itu. Informasi lebih lengkap lihat [3]

Contoh 7

$$\frac{d^{\alpha}\, e^{bx}}{dx^{\alpha}} = b^{\alpha}\, e^{bx}\text{ , asalkan } \alpha > 0$$

Contoh 8

$$\frac{d^{\alpha}\,\sin(x)}{dx^{\alpha}} = \sin(x + \frac{\alpha\, x}{2})$$

Contoh 9

$$\frac{d^{\alpha}\,\cos(x)}{dx^{\alpha}} = \cos(x + \frac{\alpha\, x}{2})$$

KESIMPULAN

Berdasarkan definisi turunan tak bulat dan contoh contoh yang diberikan dapat disimpulkan yang berikut :

1.Berbeda dengan turunan biasa, definisi turunan tak bulat melibatkan konsep integal tentu.

2. Perhitungan turunan tak bulat di suatu titik melibatkan sifat non lokal dari fungsi tersebut, sebab integral tentu tidak bersifat lokal, konsep ini terdefinisi pada selang

3. Turunan tak bulat dari suatu fungsi tak lain adalah konvolusi dari fungsi tersebut dengan fungsi kernel tertentu.

4. Karena turunan tak bulat positif tak lain adalah suatu konvolusi dari dua fungsi maka konsep tak bulat ini dapat diterapkan untuk sistem yang dapat dimodelkan dengan *fractional differential equation.*

5. Konsep turunan tak bulat belum diajarkan di tingkat pertama karena konsep tersebut melibatkan fungsi fungsi transendental yang baru diperoleh di tingkat lanjut .

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bapna, I.B. and Mathur. 2012. On Applications of Fractional Calculus in Statistics, *Intern. J. Contemp. Math. Sciences* 7(18), 849 – 856.

[2] Dalir, M. 2010. Applications of Fractional Calculus, *Applied Mathematical Sciences* 4(21), 1021 – 1032.

[3] Dannon, H.V. 2009. The Fundamental Theorem of Fractional Calculus and the meaning of Fractional Derivatives, *Gauge Institute Journal* 5(1).

[4] Debnath, L. 2003. Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering , *IJMMS* 54, 3413 – 3422.

[5] Miller, K. and Ross, B. 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* , John Willey & Sons.