ESTIMASI VOLATILITY (σ) DARI MODEL AR(*p*) MENGGUNAKAN METODE MARKOV CHAIN MONTE CARLO (MCMC)

Radite Astana Murti [1], Bambang Susanto[2], dan Hanna Arini Parhusip[3]
[1]*Mahasiswa Program Studi Matematika*
[2) 3)]*Dosen Program Studi Matematika*
email:[1]raditeastana@gmail.com [2]bsusanto5@gmail.com [3]hannaariniparhusip@yahoo.co.id
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jl. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711

PENDAHULUAN

Saham adalah satuan nilai dalam intrumen finansial yang mengacu pada bagian kepemilikan sebuah perusahaan. Investasi dalam bentuk saham banyak dipilih para investor karena saham mampu memberikan keuntungan yang menarik. Harga saham mengalami perubahan naik turun dari satu waktu ke waktu yang lain. Perubahan harga saham tergantung pada tinggi rendahnya permintaan dan penawaran. Apabila suatu saham mengalami kelebihan permintaan, maka harga saham akan naik. Sebaliknya, apabila kelebihan penawaran, maka harga saham akan turun (*web1*). Volatility saham merupakan standart deviasi untuk perubahan harga saham, (*web 2*)dengan volatility investor dapat mengetahui perubahan harga saham. Dan dengan mengetahui harga saham, investor dapat menentukan, kapan menjual, membeli atau menahan investasinya.Estimasi volatility, dilakukan menggunakan Markov Chain Monte Carlo (MCMC) dengan model AR(*p*) untuk return harga saham. Data yang digunakan dari PT. Bank Rakyat Indonesia "BRI" yang diunduh dari *website yahoo finance.*

DASAR TEORI

MODEL HARGA SAHAM

Model harga saham dipengaruhi oleh keadaan saham pada waktu lalu yang berpengaruh pada harga saham saat ini dan respon saham terhadap informasi baru tentang saham. Berdasarkan pengaruh ini dapat diartikan perubahan harga saham mengikuti proses rantai Markov. Proses rantai Markov merupakan proses stokastik dimana harga saham saat ini berpengaruh untuk memprediksi harga yang akan datang. Perubahan harga saham dikenal sebagai *return*. (*Shandy,2012*)
Pada makalah ini return harga saham dimodelkan sebagai Logaritma dari harga

saham penutupan pada saat ke-t "S_t". Bentuk Return :

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{1}$$

Dengan T = Saat pengambilan terakhir data "Harga Saham Penutupan" (*Tsay,2010*)

Karena pergerakan harga saham tidak dapat diprediksi. Maka diperlukan model agar pergerakan harga saham dapat diprediksi. Selanjutnya akan dijelaskan tentang model Autoregressive (*p*).

Model Autoregressive (*p*) "AR (*p*)"

Model (AR) autoregressive adalah suatu model yang sering digunakan untuk memprediksi output dari sebuah system yang didasarkan pada output sebelumnya. (*web 3*)

Bentuk umum model autoregressive (*p*) sebagai berikut:

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \cdots + \alpha_p R_{t-p} + \sigma\varepsilon_t \tag{2}$$

α_i adalah parameter dari model, dan ε_t adalah white noise. (*Tsay,2010*)

Menentukan nilai (*p*)

Terdapat beberapa pendekatan umum yang tersedia untuk menentukan nilai *p*. Dalam makalah ini digunakan pendekatan informasi kriteria. Kususnya *Akaike Information Criterion (AIC).* Pendekatan informasi kriteria berdasarkan likelihood. sbb:

$$AIC = \frac{-2}{T}\ln(likelihood) + \frac{2}{T}\cdot(banyak\ parameter) \tag{3}$$

dimana fungsi likelihood dievaluasi dengan estimasi maksimum likelihood dan *T* adalah ukuran sampel. Selanjutnya nilai *p* dipilih yang memberikan nilai *AIC* terkecil. (*Tsay,2010*)

Menentukan nilai awal parameter α dan σ

Nilai awal parameter ditentukan dari model return harian AR(*p*) mengunakan fungsi kuadrat terkecil. Fungsi sebagai berikut :

$$\min S_t = \sum [Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1,t} + \cdots + \alpha_p R_{t-p,t} + \sigma e_{t,t})]^2 \tag{4}$$

Dari persamaan (4) karena S_t diminimumkan, maka terdapat persyaratan. sebagai berikut :

$$\frac{\partial S_t}{\partial \alpha_0} = 0, \frac{\partial S_t}{\partial \alpha_1} = 0, \ldots, \frac{\partial S_t}{\partial \alpha_p} = 0, \frac{\partial S_t}{\partial \sigma} = 0 \tag{5}$$

- $2\sum Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1,t} + \cdots + \alpha_p R_{t-p,t} + \sigma e_{t,t})\cdot(-1)$
  $n\,\alpha_0 + \alpha_1 \sum R_{t-1,t} + \alpha_2 \sum R_{t-2,t} + \cdots + \alpha_p \sum R_{t-p,t} + \sigma \sum e_{t,t} = \sum Y_t$

- $2\sum Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1,t} + \cdots + \alpha_p R_{t-p,t} + \sigma e_{t,t})\cdot(-R_{t-1,t})$
  $\alpha_0 \sum R_{t-1,t} + \alpha_1 \sum R_{t-1,t} R_{t-1,t} + \alpha_2 \sum R_{t-2,t} R_{1,t} + \cdots + \alpha_p \sum R_{t-p,t} R_{1,t} - \sigma \sum e_{t,t} R_{t-1,t} = \sum Y_t R_{t-1,t}$

- $2\sum Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1,t} + \cdots + \alpha_p R_{t-p,t} + \sigma e_{t,t})\cdot(-R_{t-p,t})$
  $\alpha_0 \sum R_{t-p,t} - \alpha_1 \sum R_{t-1,t} R_{t-p,t} + \alpha_2 \sum R_{t-2,t} R_{t-p,t} + \cdots + \alpha_p \sum R_{t-p,t} R_{t-p,t} + \sigma \sum e_{t,t} R_{t-p,t} = \sum Y_t R_{t-p,t}$

- $2\sum Y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1,t} + \cdots + \alpha_p R_{t-p,t} + \sigma e_{t,t})\cdot(-e_{t,t})$
  $\alpha_0 \sum e_{t,t} + \alpha_1 \sum R_{t-1,t} e_{t,t} - \alpha_2 \sum R_{t-2,t} e_{t,t} + \cdots + \alpha_p \sum R_{t-p,t} e_{t,t} + \sigma \sum e_{t,t} e_{t,t} = \sum Y_t e_{t,t}$

$$\begin{bmatrix} n & \sum R_{t-1,t} & \sum R_{t-2,t} & \cdots & \sum e_{t,t} \\ \sum R_{t-1,t} & \sum R_{t-1,t}^2 & \sum R_{t-1,t} R_{2,t} & \cdots & \sum e_{t,t} R_{t-1,t} \\ & & \vdots & & \\ \sum R_{t-p,t} & \sum R_{t-1,t} R_{t-p,t} & \sum R_{t-2,t} R_{t-p,t} & \cdots & \sum e_{t,t} R_{t-p,t} \\ \sum e_{t,t} & \sum R_{t-1,t} e_{t,t} & \sum R_{t-2,t} e_{t,t} & \cdots & \sum e_{t,t}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t R_{t-1,t} \\ \vdots \\ \sum Y_t R_{t-p,t} \\ \sum Y_t e_{t,t} \end{bmatrix}$$

Setelah nilai awal parameter yang akan diestimasi diperoleh. Estimasi dilakukan dengan metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

Markov Chain Monte Carlo digunakan untuk menghasilkan sampel titik yang ditetapkan oleh distribusi posterior gabungan. Secara umum untuk menghitung distribusi posterior gabungan melibatkan gabungan distribusi prior untuk parameterparaneter yang belum diketahui, dan sulit untuk dipecahkan. Namun, dengan menggunakan distribusi posterior bersyarat, untuk parameter yang belum diketahui dapat diestimasi dengan mudah. (*William,2009*)

Model Bayesian

Dalam pendekatan Bayesian. Parameter yang akan diestimasi harus memiliki distribusi. Distribusi ini disebut distribusi prior. Distribusi prior biasanya ditentukan oleh para ahli atau ditentukan oleh peneliti (*Koop,2003*). Berikut distribusi prior untuk setiap parameter yang akan diestimasi :

$$P(\alpha) \sim N(m_{\alpha}, s_{\alpha}^2)\ ,\ P(h) \sim G(a, b), \text{ dan}$$
$$P(R|\alpha, h) \sim N(\alpha, h)$$

Dengan $m_{\alpha}, s_{\alpha}^2, a, b$ adalah penggerak parameter prior dan $h = \sigma^{-2}$. $P(R|\alpha,h) \sim N$ karena $P(R|\alpha,h)$ adalah "likelihood" dari R_t , R_t berdistribusi normal karena pada model AR(p) terdapat $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ maka $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1 R_{t-1}, \cdots, \alpha_p R_{t-p}]$ dan $h = \sigma^{-2}$. Distribusi prior diatas diasumsikan independen satu sama lain.

Gibbs Sampling

Gibbs Sampling adalah prosedur dimana nilai baru atau nilai awal dari parameter yang akan diestimasi digunakan untuk menghasilkan nilai parameter selanjutnya. Gibbs Sampling diterapkan ketika distribusi posterior bersyarat diketahui. Distribusi posterior bersyarat digunakan untuk menghasilkan parameter acak yang dapat ditentukan mean atau rata-ratanya untuk menghasilkan integrasi Monte Carlo. Gibbs Sampling bekerja dengan mensimulasi nilai baru untuk setiap parameter selanjutnya, simulasi dilakukan dari distribusi posterior lengkap bersyarat. (William,*2009*)

Penentuan Distribusi Posterior Bersyarat

Distribusi posterior bersyarat diperoleh dari distribusi gabungan.

Dimisalkan: $R = (R_1, \cdots, R_T)$, $h = \sigma^{-2}$, G = distribusi gamma. Bentuk Distribusi Gabungan :

$$P(\alpha, h|R) = P(\alpha).P(h).P(R|\alpha, h)$$
$$= \prod_{j=0}^{p} P(\alpha)\ .\ P(h). \prod_{t=1}^{n} P\ (R_t|\alpha, h)$$

$$= \prod_{j=0}^{p}\left(\frac{1}{2\pi s_j^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2s_j^2}(\alpha_j - m_j)^2\right\}.(h)^{a-1}\exp\{-bh\}.$$
$$\prod_{t=1}^{n}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}h(R_t - \alpha)^2\right\}$$
$$= \prod_{j=0}^{p}\left(\frac{1}{2\pi s_j^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\sum_{j=0}^{p}\left(-\frac{1}{2s_j^2}\alpha_j^2 + \frac{m_j}{s_j^2}\alpha_j\right)\right\}.$$
$$(h)^{a-1}\exp\{-bh\}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}h\sum_{t=1}^{n}(R_t - \alpha)^2\right\}$$

Jika distribusi prior untuk parameter :

$$P(\alpha_j) \sim N(m_{\alpha}, s_j^2)$$
$$P(h) \sim G(a, b)$$
$$P(R|\alpha, h) \sim N(\alpha, h)$$

Maka diperoleh

$P(\alpha) \propto \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} -\frac{1}{2s_j^2}\alpha^2 + \frac{m_j}{s_j^2}\alpha\right\}$

$P(h) \propto h^{a-1}\exp\{-bh\}$ dan

$P(R|\alpha, h) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}h(R_t - \alpha)^2\right\}$

Langkah 1 : α

$$P(\alpha_t|h, R) \propto \exp\left\{\sum_{j=0}^{p}\left(-\frac{1}{2s_j^2}\alpha_j^2 + \frac{m_j}{s_j^2}\alpha_j\right) + C_1\right\}.$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}h\sum_{t=1}^{n}(R_t - \alpha)^2\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{j=0}^{p}\left(-\frac{1}{2s_j^2}\alpha_j^2 + \frac{m_j}{s_j^2}\alpha_j\right) + C_1\right\}$$
$$.\exp\left\{-\frac{1}{2}h\sum_{t=1}^{n}(R_t - \alpha_j R_{n-j})^2 + C_2\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{j=0}^{p} -\frac{1}{2s_j^2}\alpha_j^2 + \sum_{j=1}^{p}\frac{m_j}{s_j^2}\alpha_j + C_1\right\}$$
$$.\exp\left\{-\frac{1}{2}h\sum_{t=1}^{n}(R_t^2 + \alpha_j^2 R_{n-j}^2 - 2R_t\alpha_j R_{n-j}) + C_2\right\}$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{s_j^2} + h\sum_{j=1}^{p}R_{n-j}^2\right)\alpha_j^2 + \left(\sum_{j=0}^{p}\frac{m_j}{s_j^2} + h\sum_{t=1}^{n}R_t R_{t-p}\right)\alpha_j - \frac{1}{2}h\sum_{t=1}^{n}R_t^2 + C\right\}$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{s_j^2} + h\sum_{j=1}^{p}R_{n-j}^2\right)\alpha_j^2 + \left(\sum_{j=0}^{p}\frac{m_j}{s_j^2} + h\sum_{j=0}^{p}R_{n-j}\sum_{t=1}^{n}R_t\right)\alpha_j - \frac{1}{2}h\sum_{t=1}^{n}R_t^2 + C\right\}$$

Diperoleh :

$$s_{\alpha}^2 = \left(\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{s_j^2} + h\sum_{j=1}^{p}R_{n-j}^2\right)^{-1}\ dan$$

$$m_{\alpha} = s_{\alpha}^2.\left(\sum_{j=0}^{p}\frac{m_j}{s_j^2} + h\sum_{j=0}^{p}R_{n-j}\sum_{t=1}^{n}R_t\right)$$

Maka :

$$\alpha_i | h, R \sim N \left(\sum_{j=0}^{p}\frac{m_j}{s_j^2} + h\sum_{j=0}^{p} R_{n-j}\sum_{i=1}^{n} R_i\right)\left(\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{s_j^2} + h\sum_{j=1}^{p} R_{n-j}^2\right)^{-1}, \left(\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{s_j^2} + h\sum_{j=1}^{p} R_{n-j}^2\right)^{-1} \quad (6)$$

Langkah 2 : h

$$P(h|\alpha, R) \propto (h)^{a-1}\exp\{-bh\}.(h)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{n}(R_i-\alpha)^2\right\}$$

$$= (h)^{\frac{n}{2}+a-1}\exp\left\{-\left(b-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\alpha_j R_{n-j})^2\right)h\right\}$$

$$h|\alpha, R \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}+a, b+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\alpha_j R_{n-j})^2\right) \quad (7)$$

Sehingga didapat distribusi posterior bersyarat :

$$P(\alpha_i|h, R) \sim N(m_*, s_*^2)$$
$$P(h|\alpha, R) \sim G(a, b)$$

Algoritma Gibbs Sampling

Diasumsikan $\alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$ dan h^0 menjadi nilai awal untuk $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ dan h , kemudian Gibbs Sampling berjalan bedasarkan distribusi posterior bersyarat. Sebagai berikut :

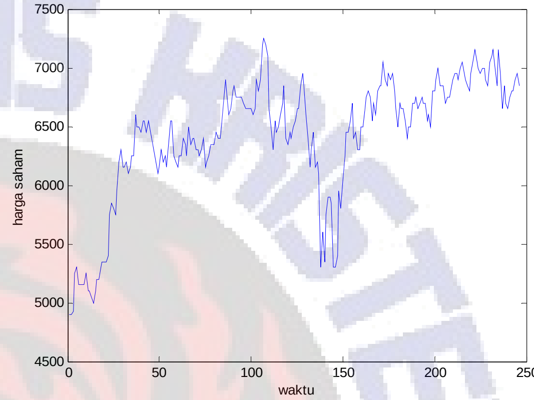
1. Menarik sempel acak α_0^1 dari $P(\alpha_0|\alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0, h^0, R)$ kemudian
2. Menarik sempel acak α_1^1 dari $P(\alpha_1|\alpha_0^1, \alpha_2^0, \dots, \alpha_p^0, h^0, R)$ kemudian
3. Menarik sempel acak α_p^1 dari $P(\alpha_p|\alpha_0^1, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{p-1}^1, h^0, R)$ kemudian
4. Menarik sampel acak h^o dari $P(h|\alpha^1, R)$

Proses ini berulang menggunakan set parameter yang sudah dihasilkan hingga menghasilkan set parameter berikutnya, hingga membentuk rantai. Rantai yang dihasilkan dari prosedur sampling dikenal sebagai rantai markov, karena setiap nilai baru yang dihasilkan untuk parameter bergantung pada parameter sebelumnya (*William,2009*). Dalam Algoritma Gibbs Sampling untuk menghasilkan Gibbs Sampling dilakukan pembuangan data secara acak yang sering disebut burn-in (*Nugroho*, -)

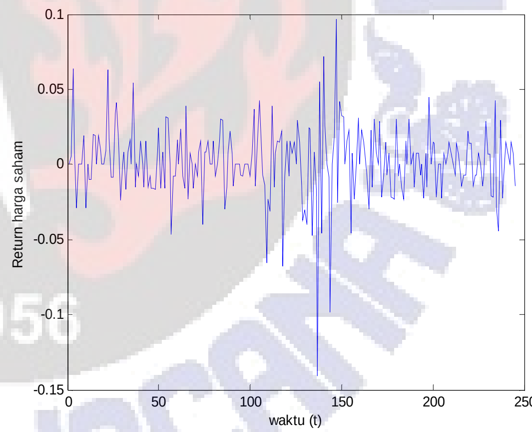
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Menentukan Nilai (p)

Menggunakan rumus *Akaike Information Criterion (AIC)* pada persamaan (3) diperoleh nilai (p) berdasarkan data saham penutupan PT Bank Rakyat Indonesia yang diambil pada tanggal 1 Maret 2011 sampai tanggal 1 Maret 2012. Data ditunjukan oleh **Gambar 1**. *Return* dari harga saham penutupan harian PT. Bank Rakyat Indonesia. ditunjukkan **Gambar 2.** yang merupakan selisih dari nilai logaritma harga saham saat *t* dengan harga saham saat *t*-1.



Gambar 1. Harga Saham Penutupan PT. Bank Rakyat Indonesia



Gambar 2. Return Harga Saham

Daftar nilai *p* ditunjukkan pada **Tabel 1**.

P	0	1	2	3	4
AIC	613.699	8.03768	2.79401	4.69393	5.36164

5	6	7	8	9
0	1.3	2.34	3.2248	5.03546

10	11	12
6.11155	8.39335	7.96115

Selanjutnya dipilih nilai *p*=5 karena nilai AIC terkecil. Sehingga bentuk model AR(p) yang digunakan adalah

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \alpha_2 R_{t-2} + \alpha_3 R_{t-3} + \alpha_4 R_{t-4} + \alpha_5 R_{t-5} + \sigma \varepsilon_t$$

Dengan t = *p*+1 = 6 Model AR(*p*) menjadi

$$R_6 = \alpha_0 + \alpha_1 R_5 + \alpha_2 R_4 + \alpha_3 R_3 + \alpha_4 R_2 + \alpha_5 R_1 + \sigma \varepsilon_6$$

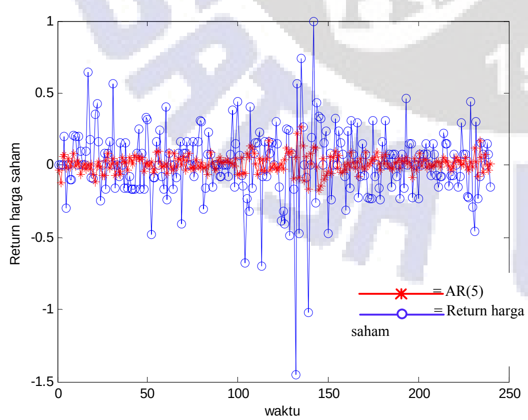
Menentukan Nilai Awal parameter α dan σ

Setelah didapat nilai (*p*) untuk model AR(*p*), selanjutnya ditentukan nilai awal untuk parameter-parameter yang akan diestimasi, penentuan menggunakan fungsi kuadrat terkecil dengan nilai *p*=5 dari persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai awal untuk setiap parameter, yang ditunjukan pada **Tabel 2.**

Table 2. Daftar nilai awal untuk setiap parameter

Parameter	α_0	α_1	α_2	α_3
Nilai	0.0162	-0.0842	0.0229	-0.1015

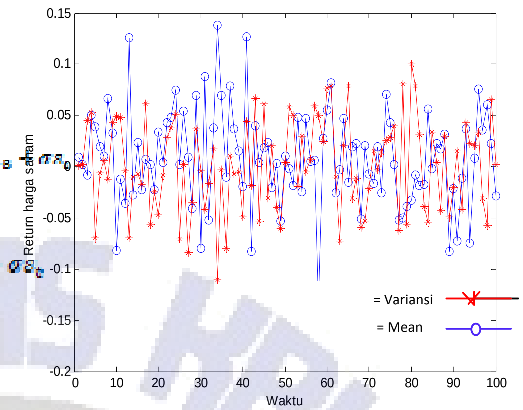
α_4	α_5	σ
-0.1802	0.0615	0.0256



Gambar 3. AR(5) dan Return Harga Saham

Estimasi Parameter

Estimasi parameter diperoleh dari mean dan variansi dari algoritma Gibbs Sampling, dengan t=0 sampai t=100 ditunjukan **Tabel 3** dan **Gambar 4.**



Gambar 4. Mean dan Variansi Gibbs Sampling.

Tabel 3. Daftar estimasi untuk setiap parameter pada Mean dan Variansi

Parameter	α_0	α_1	α_2	α_3
Mean	0.008	-0.0083	0.0053	-0.012
Variansi	0.002	0.0029	0.0043	0.0033

α_4	α_5	σ^{-2}
-0.0158	-0.0038	0.9901
0.0029	0.0043	0.01

Hasil parameter yang diperoleh dari Gibbs Samling di pengaruhi oleh nilai awal parameter dan input nilai parameter distribusi prior. Sejauh ini parameter yang diperoleh belum dijamin baik tidaknya. Karena belum dilakukan Uji untuk parameter yang diperoleh.

KESIMPULAN

Pada makalah ini telah dijelaskan bagaimana melakukan estimasi parameter α dan σ (volatility) dengan menggunakan data harga saham penutupan harian dari PT. Bank Rakyat Indonesia BRI. pada tanggal 1 Maret 2011 sampai 1 Maret 2012. Metode yang digunakan adalah Metode Markov Chain Monte Carlo dengan pendekatan Gibbs Sampling. Diperoleh hasil Mean dan Variansi dari setiap pamaneter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ dan σ^{-2}. Hasil ini dipengaruhi oleh model Return yang digunakan dan nilai awal untuk setiap parameter pada model, serta parameter dari distribusi prior. Untuk paper selanjutnya akan dibahas tentang Uji parameter untuk hasil Gibbs Sampling.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih ditujukan kepada :
Didit Budi Nugroho untuk informasi literatur, bimbingan tentang makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

William, B. J., 2009, *MCMC Estimation in MLwiN versi 2.24*. Bristol : University of Bristol.

Koop , G., 2003, *Bayesian Econometrics*, Department of Economics, University of Glasgow.

Nugroho, D. B, Morimoto, T. 2008. *Comparison of Griddy Gibbs and Metropolis-Hastings Sampler for Estimation of the Standard LNSV*. Department of Mathematical Sciences, Kwansei Gakuin University.

Nugroho, D. B, _.*Gibbs Sampler for A Sample from A Single Population*, _.

Sandhy, K. A. 2012. *Perhitungan Harga Opsi Eropa menggunakan Metode Gerak Brown Geometri*, Skripsi. Fakultas Sains dan Matematika. Universitas Kristen Satya Wacana.

Tsay, Ruey S. 2010,*Analysis od financial Time Series*. Chicago : The University of Chicago.

PUSTAKA WEB

Web 1 :
Saham http://id.wikipedia.org/wiki/saham (diakses pada 15 Juni 2012)

Web 2 :
Volatility http://id.wikipedia.org/wiki/volatility (diakses pada 15 Juni 2012)

Web 3 :
Autoregressive http://id.wikipedia.org/wiki/Autoregressive (diakses pada 2 Juli 2012)