PENGHITUNGAN SENSITIVITAS HARGA OPSI EROPA DALAM BERBAGAI METODE NUMERIK

Didit Budi Nugroho
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jln. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711 Jawa Tengah

Email: di2t_bn@yahoo.co.id; didit.bn@gmail.com

ABSTRAK

Sensitivitas harga opsi adalah derivatif dari harga opsi terhadap parameter-parameter model. Artikel ini mengilustrasikan bagaimana menghitung sensitivitas harga opsi Eropa: *delta*, *gamma*, dan *theta*, menggunakan metode trinomial perluasan, metode beda hingga Crank-Nicolson, dan metode elemen hingga Crank-Nicolson. Diperoleh pengamatan bahwa metode beda hingga memberikan hasil terbaik untuk *delta* dan *gamma* pada harga saham di sekitar harga pelaksanaan. Sementara itu, hasil terbaik untuk theta diberikan oleh metode trinomial perluasan.

Keywords: sensitivitas harga opsi, opsi Eropa, trinomial, beda hingga, elemen hingga.

PENDAHULUAN

Opsi adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada pemilik untuk membeli (dinamakan opsi *call*) atau menjual (dinamakan opsi *put*) aset pokok (misalnya saham, bond, mata uang, komoditas, dan lain sebagainya) kepada penerbit pada waktu dan harga yang sudah ditentukan. Opsi memberikan hak kepada pemilik, tetapi sebaliknya penerbit berkewajiban untuk menjual atau membeli aset pokok yang diminta oleh pemilik.

Dua jenis opsi standar yang terkenal yaitu opsi Eropa dan Amerika. Bedanya yaitu opsi Eropa hanya dapat digunakan pada saat jatuh tempo, sedangkan opsi Amerika dapat digunakan selama masa hidup opsi.

Sekarang diperhatikan contoh berikut ini. Pada suatu saat penerbit menjual suatu opsi *call* Eropa seharga V = \$130 untuk 100 lembar saham A dengan harga pelaksanaan K = \$3 dan waktu jatuh tempo T = 1 tahun. Jika pada saat itu diketahui bahwa saham A mempunyai harga S = \$4, simpangan baku σ = 30% per tahun, suku bunga deposito bank r = 5% per tahun, maka menggunakan rumus Black-Scholes, lihat [1], diperoleh harga opsi tersebut yaitu sebesar \$121.19. Ini berarti bahwa penerbit telah menjual opsi \$8.81 lebih mahal daripada harga teoritis.

Ketika suatu opsi telah diberi harga dan dijual, maka penerbit opsi akan menghadapi masalah bagaimana strategi yang tepat untuk mengelola resiko. Strategi yang bisa dilakukan yaitu *naked position* dimana penerbit tidak melakukan apa-apa atau *covered position* penerbit membeli saham sebanyak saham yang tercantum dalam opsi. Strategi tersebut dinamakan pemagaran (*hedging*), lihat [2]. Dalam contoh di atas, strategi pertama akan berjalan dengan baik jika harga saham A di pasar pada saat jatuh tempo adalah kurang dari \$3 (harga pelaksanaan). Ini dikarenakan pemilik opsi tidak akan menggunakan haknya untuk membeli saham A dengan harga yang lebih tinggi daripada harga pasar. Akibatnya penerbit memperoleh keuntungan sebesar \$130. Sebaliknya, jika harga saham A pada saat jatuh tempo melebihi harga pelaksanaan, misalnya \$4, maka penerbit akan mengalami kerugian sebesar

$$130\$ - (\$4 - \$3)\times 100 = \$30$$

karena pemilik opsi akan menggunakan haknya untuk membeli saham A. Sementara itu, strategi kedua merupakan strategi yang berlawanan dengan strategi pertama.

Kedua strategi di atas jelas tidak akan memberikan kenyamanan dalam mengelola resiko. Ini dikarenakan strategi bisa memberikan dua hasil yang mungkin yaitu untung atau rugi. Yang diharapkan adalah suatu kejadian pemagaran sempurna (*perfect hedging*), yaitu suatu pemagaran yang mengakibatkan biaya yang ditanggung selalu sama dengan harga opsi pada saat jatuh tempo [2].

Terdapat strategi lain yang lebih akurat dalam mengelola resiko, yaitu penghitungan dari yang dikenal dengan nama *Greeks* (*hedge ratios*). Dalam artikel hanya akan diperhatikan tiga *Greeks*, yaitu *delta*, *gamma*, dan *theta*. Berikut ini adalah penjelasan untuk ketiga *Greeks* tersebut.

Delta (disimbolkan Δ) menyatakan sensitivitas harga opsi terhadap pergerakan harga aset pokok dan didefinisikan sebagai derivatif parsial pertama dari harga opsi terhadap harga aset pokok. Ini berarti bahwa ketika harga aset pokok berubah satu satuan maka harga opsi berubah sebesar Δ kali perubahan harga aset pokok. Dalam prosedur pemagaran tak beresiko Black-Scholes, posisi *call* dibiayai dengan membuat suatu portofolio dimana penerbit menjual satu satuan opsi *call* dan memegang Δ satuan aset pokok. Jadi, jika penerbit telah menjual opsi *call* untuk sebanyak N aset pokok maka posisi penerbit dapat dipagari dengan membeli sebanyak $\Delta \times N$ aset pokok.

Gamma (disimbolkan Γ) menyatakan sensitivitas strategi pemagaran *delta* terhadap pergerakan harga aset pokok dan didefinisikan sebagai derivatif parsial kedua dari harga opsi terhadap harga aset pokok. Akibatnya yaitu bahwa penyesuaian portofolio yang diperlukan untuk mempertahankan *delta* netral (*delta* bernilai nol atau terjadi pemagaran sempurna) perlu dilakukan lebih sering jika gamma bernilai tinggi [3] atau lebih sedikit frekuensinya jika gamma bernilai rendah [2].

Theta (disimbolkan Θ) menyatakan sensitivitas harga opsi terhadap pergerakan waktu dan didefinisikan sebagai derivatif parsial pertama dari harga opsi terhadap waktu. Ini berarti bahwa ketika waktu berubah satu periode waktu maka harga opsi berubah sebesar Θ kali perubahan waktu.

Dalam dua artikel sebelumnya, lihat [5,6], penulis telah menunjukkan bagaimana menghitung sensitivitas harga opsi menggunakan metode binomial, metode trinomial, dan metode beda hingga (disingkat MBH). Selanjutnya di sini akan disajikan penghitungan sensitivitas harga opsi dalam metode elemen hingga (disingkat MEH) dan akan dibandingkan dengan metode-metode sebelumnya. Untuk itu, metode trinomial perluasan dan metode beda hingga Crank-Nicolson untuk penghitungan sensitivitas akan ditinjau kembali dalam artikel ini. Metode penghitungan sensitivitas didasarkan pada hampiran beda rata-rata:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

yang mempunyai galat pemotongan sebanding dengan h^2.

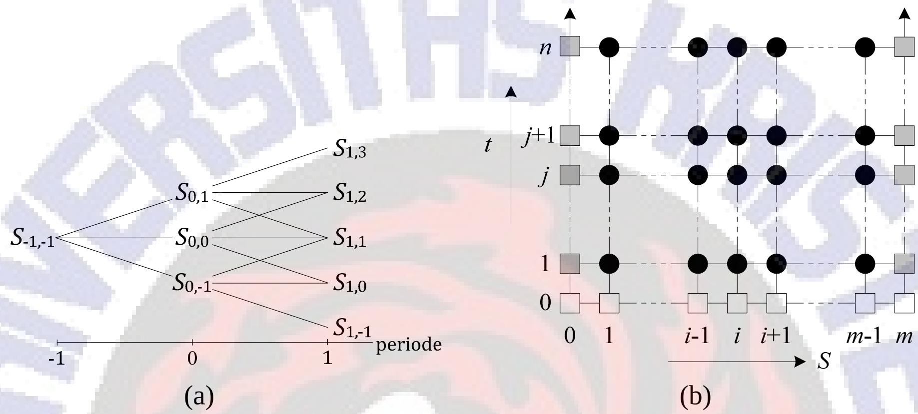
TIGA METODE UNTUK PENGHITUNGAN SENSITIVITAS

Di sini hanya akan dijelaskan implementasi metode trinomial perluasan, metode beda hingga, dan metode elemen hingga khusus untuk penghitungan sensitivitas harga opsi. Implementasi ketiga metode untuk penghitungan harga opsi dapat dilihat lebih jelas di [4, 5, 6].

Gambar 1(a) mengilustrasikan pohon trinomial perluasan mundur satu periode waktu. Pohon tersebut dibentuk dari pohon trinomial baku dengan cara cukup menambah 1 periode waktu sebelum periode saat ini; periode saat ini dilabelkan dengan 0 dan interval waktu adalah Δt.

Secara teknis, menghitung *delta* adalah mengukur perubahan harga opsi terhadap perubahan harga aset pokok tanpa perubahan waktu. Menghitung *gamma* adalah mengukur perubahan *delta* terhadap rata-rata perubahan harga aset pokok tanpa perubahan waktu. Menghitung *theta* adalah mengukur perubahan harga opsi terhadap perubahan waktu tanpa perubahan harga aset pokok. Jadi rumus hampiran beda rata-rata untuk *delta*, *gamma*, dan *theta* berturut-turut dinyatakan oleh

$$\Delta \approx \frac{V(S_{0,1})-V(S_{0,-1})}{S_{0,1}-S_{0,-1}},\ \Gamma \approx \frac{\dfrac{V(S_{0,1})-V(S_{0,0})}{S_{0,1}-S_{0,0}}-\dfrac{V(S_{0,0})-V(S_{0,-1})}{S_{0,0}-S_{0,-1}}}{\frac{1}{2}(S_{0,1}-S_{0,-1})},\ \Theta \approx \frac{V(S_{1,1})-V(S_{-1,-1})}{2\Delta t}.$$



Gambar 1: (a) Pohon trinomial perluasan mundur 1 periode waktu; (b) *Grid* pada bidang berhingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan harga opsi. Molekul □ menunjukkan lokasi nilai-nilai awal (diketahui). Molekul ■ menunjukkan lokasi nilai-nilai batas (diketahui). Molekul ● menunjukkan lokasi titik-titik dalam (dihitung).

Berbeda dengan metode pohon, dalam metode beda hingga dan elemen hingga digunakan *grid* atau *mesh* seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 1(b). Metode beda hingga diaplikasikan untuk menyelesaikan Persamaan Panas $\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Ini dimulai dengan mengkonversikan masukan harga aset pokok $S_{\min}$ dan S_{maks} berturut-turut menjadi $x_{\min}$ dan x_{maks}, dan juga mengkonversikan masukan waktu t = 0 dan t = T berturut-turut menjadi τ_{maks} dan $\tau_{\min}$ = 0. Selanjutnya interval x dibagi menjadi subinterval dengan lebar sama dan begitu juga untuk interval τ_{maks}. Berbeda dengan metode beda hingga, dalam metode elemen hingga dipunyai keuntungan yaitu fleksibel dalam diskritisasi harga saham atau waktu. Artinya bahwa lebar subinterval harga saham maupun waktu tidak harus sama. Tetapi, untuk keperluan perbandingan metode, di sini diambil harga-harga saham yang sama dengan di metode beda hingga. Untuk implementasi metode, di sini penulis menggunakan skema Crank-Nicolson.

Hampiran-hampiran beda rata-rata untuk *delta*, *gamma*, dan *theta* dalam metode beda hingga dan elemen hingga berturut-turut dinyatakan oleh

$$\Delta_i = \frac{V_{i+1,n}-V_{i-1,n}}{S_{i+1}-S_{i-1}},\ i = 1, 2, ..., m-1,$$

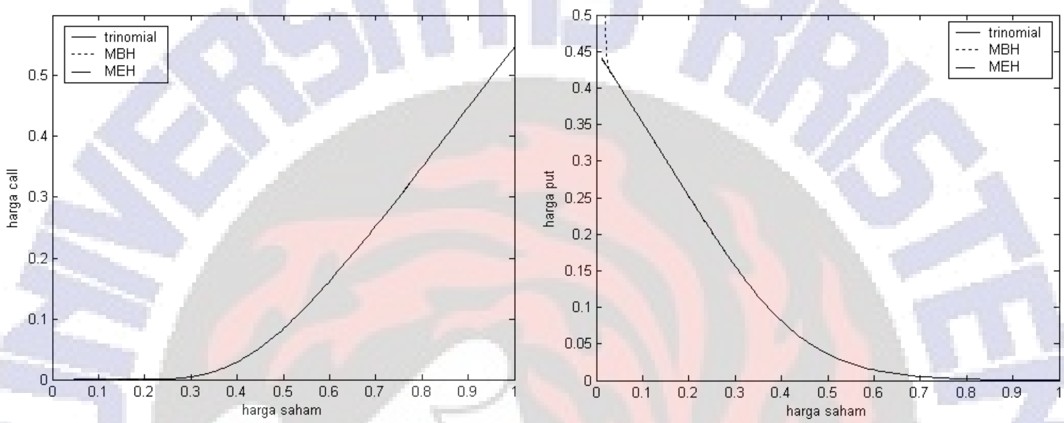
$$\Gamma_i = \frac{\Delta_i^+ - \Delta_i^-}{\frac{1}{2}(S_{i+1}-S_{i-1})} \text{ dimana } \Delta_i^+ = \frac{V_{i+1,n}-V_{i,n}}{S_{i+1}-S_i},\ \Delta_i^- = \frac{V_{i,n}-V_{i-1,n}}{S_i-S_{i-1}},\ i = 1, 2, ..., m-1,$$

$$\Theta_i = \frac{V_{i,n-1}-V_{i,n}}{\Delta t},\ i = 0, 1, ..., m.$$

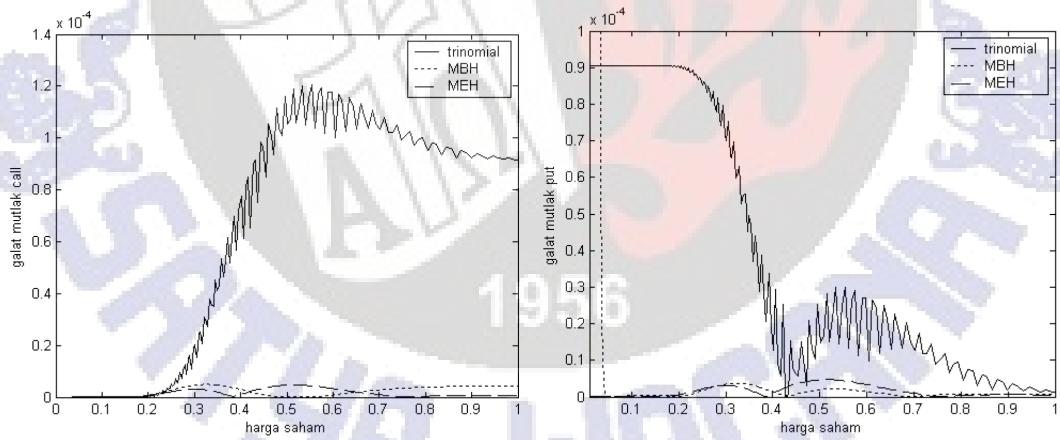
PERBANDINGAN METODE

Diperhatikan opsi Eropa atas saham dengan harga pelaksanaan \$0.5 dan jatuh tempo 1 tahun. Data pasar mengasumsikan bahwa suku bunga bebas resiko 10% dan simpangan baku 30%. Untuk keperluan perbandingan, dalam komputasi diambil harga-harga saham dari \$0.01 sampai \$5, banyak subinterval waktu dan saham adalah 500.

Dalam Gambar 2 ditunjukkan fungsi harga *call* dan *put* Eropa sebagai fungsi dari harga saham saat ini. Selanjutnya dari pengamatan galat, Gambar 3, dapat dilihat bahwa metode beda hingga dan elemen hingga memberikan hasil yang lebih dekat ke Black-Scholes.



Gambar 2: Hampiran harga opsi Eropa sebagai fungsi dari harga saham saat ini.

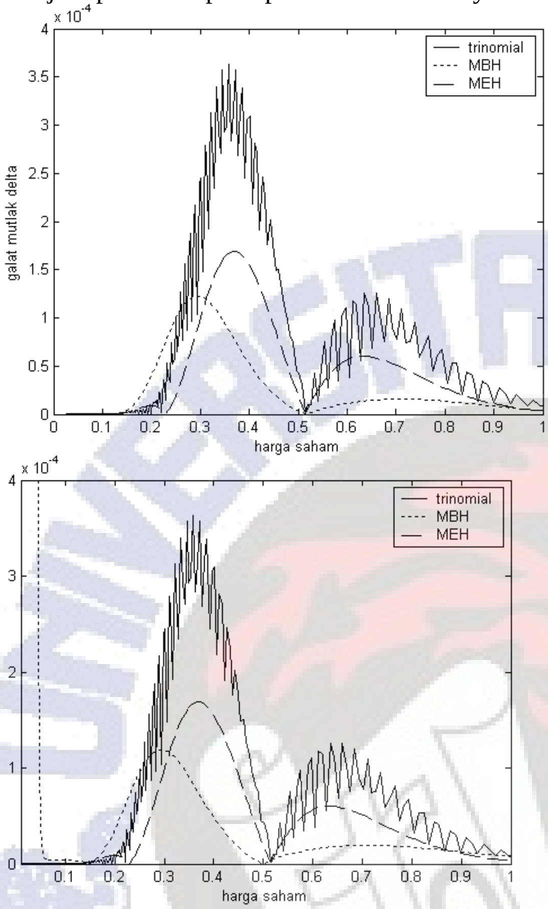


Gambar 3: Galat hampiran untuk harga opsi Eropa sebagai fungsi dari harga saham saat ini.

Gambar 4, 5, dan 6 menunjukkan galat hampiran untuk *delta*, *gamma*, dan *theta*. Diamati bahwa *delta* dan *gamma* untuk opsi *call* memiliki tingkah laku yang sama (dalam hal pergerakan harga) seperti untuk opsi *put* ketika digunakan ketiga metode. Sementara itu, untuk penghitungan theta, hanya metode trinomial yang memberikan tingkah laku yang sama antara *call* dan *put*.

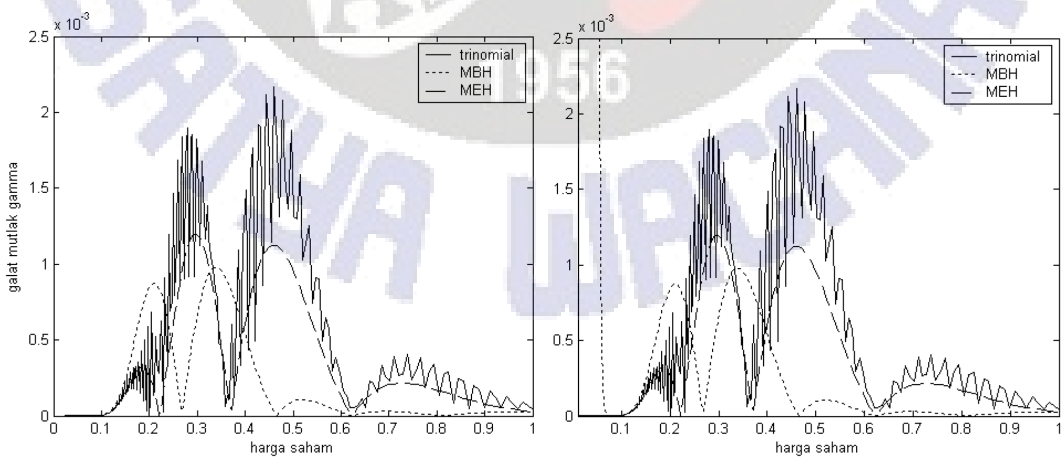
Sekarang diamati pada harga-harga saham di sekitar harga pelaksanaan karena itu merupakan titik-titik perhatian pada harga opsi. Untuk penghitungan *delta* dan *gamma*, metode beda hingga memberikan hasil terbaik dibandingkan dengan dua metode lainnya. Sementara itu, metode pohon trinomial perluasan memberikan hasil terbaik dalam penghitungan *theta*.

Terakhir, diamati opsi *put* pada harga saham yang mendekati nol. Terlihat bahwa metode beda hingga memberikan hampiran yang berubah sangat cepat. Karena itu, masalah tersebut perlu menjadi perhatian pada penelitian berikutnya untuk mencari penjelasan mengapa itu bisa terjadi.



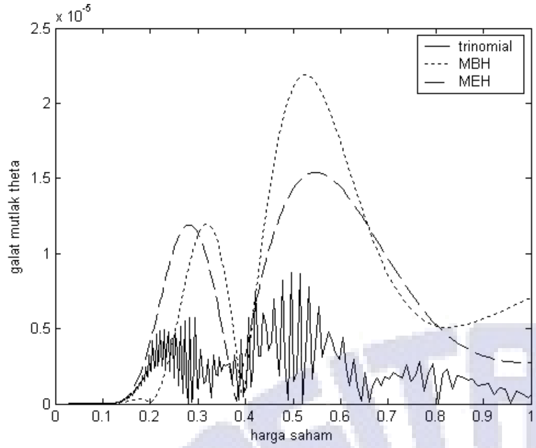
(a) (b)

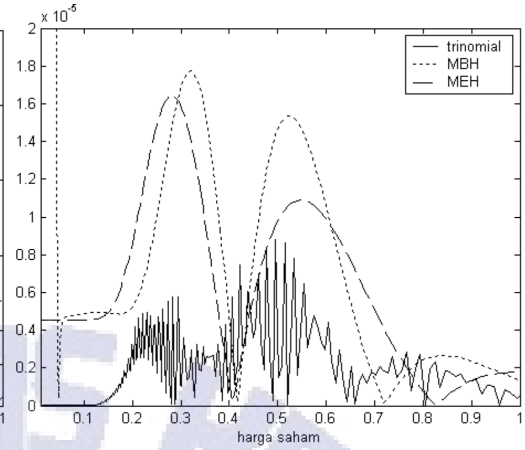
Gambar 4: Galat hampiran untuk *delta* sebagai fungsi dari harga saham saat ini: (a) *Call* Eropa; (b) *Put* Eropa.



(a) (b)

Gambar 5: Galat hampiran untuk *gamma* sebagai fungsi dari harga saham saat ini: (a) *Call* Eropa; (b) *Put* Eropa.





Gambar 6: Galat hampiran untuk *theta* sebagai fungsi dari harga saham saat ini: (a) *Call* Eropa; (b) *Put* Eropa.

KESIMPULAN

Artikel ini telah menunjukkan bahwa metode beda hingga memberikan hasil terbaik untuk penghitungan harga opsi, *delta*, dan *gamma* pada harga-harga saham di sekitar harga pelaksanaan. Sementara itu, hasil terbaik untuk *theta* diberikan oleh metode pohon trinomial perluasan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Black, F. and M. Scholes. 1973. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81**, 637-659.

[2] Kwok, Y.K. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, Singapore.

[3] Lyuu, Y.D. 1999. *Financial Engineering and Computation: Principles*, *Mathematics*, *Algorithms*, Naskah, National Taiwan University.

[4] Nugroho, D.B. dan A. Sroyer. 2008. *Numerical Methods for European Options*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIV, Universitas Sriwijaya.

[5] Nugroho, D.B. 2009. *Penghitungan Sensitivitas Harga Opsi dalam Model Binomial dan Trinomial*, Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Parahyangan.

[6] Nugroho, D.B. 2010. *Penghitungan Sensitivitas Harga Opsi dalam Metode Beda Hingga*, Prosiding Seminar Nasional MIPA, UNY.